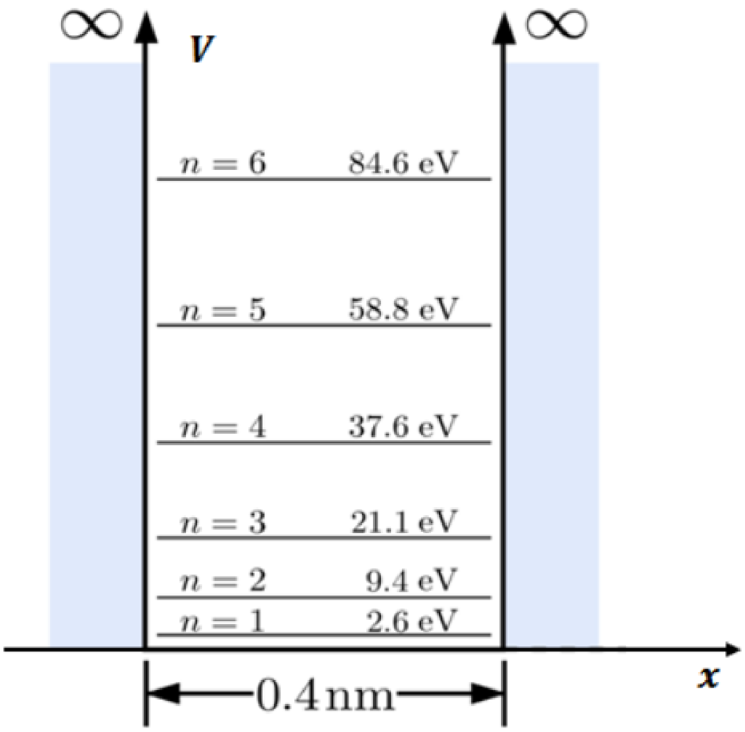
Fragestellungen

1. Ein Glühlämpchen der Leistung $P = 100\text{W}$ emittiert Licht in einer isotropen Art, sie wird im Zentrum eines kubischen Raumes der Seitenlänge $L = 7\text{m}$ platziert. Wieviel Energie erreicht in 10 Minuten die Decke des Zimmers?

2. Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem angeregten Zustand, nachdem es ein Photon aus dem UV Bereich der Wellenlänge $\lambda = 97,2\text{nm}$ absorbiert hat. Durch verschiedene Übergänge, denen jeweils eine die Emission eines Photons bestimmter Wellenlänge zugeordnet werden kann, kann dieses Atom seinen Grundzustand erreichen. Wieviele solcher Übergänge, bei denen Photonen mit einer anderen Wellenlänge als die des absorbierten Photons emittiert werden, sind möglich? Welche dieser Übergänge verursachen Emission im sichtbaren Bereich? (Rydbergkonstante $R = 1,0974 \times 10^7 m^{-1}$)

3. In der Abbildung sind die Energieniveaus eines Teilchens der Masse m, das sich in einem eindimensionalen Potentialtopf unendlicher Höhe befindet, dargestellt. Bestimme die Masse des Teilchens, indem du die Idee von de Broglie verwendest und annimmst, dass die stationäre Wellenfunktion des Teilchens an den Rändern null sein muss.



Lösung Fragestellungen

1. Da sich die Lichtquelle genau im Zentrum des Zimmers befindet, verteilt sich die Energie gleichmäßig auf alle sechs quadratischen Flächen verteilt (Hinweis: Die Verteilung der absorbierten Energie auf einer Seitenfläche ist natürlich nicht gleichmäßig!). In 10 Minuten setzt die Lichtquelle eine elektrische Energie von $W = P \cdot t = 100W \cdot 600s = 6 \times 10^4 J$ in elektromagnetische Energie um. Diese Energie wird aufgrund der Erhaltung des Energiestroms i.e. bei Vernachlässigung von Verlusten zu 1/6 von der Decke absorbiert, sie nimmt also $W_{abs} = 10000J$ auf.

   Hinweis I: Ich habe dieses Ergebnis auch erhalten mittels Integration des Poynting-Vektors über die Deckenfläche erhalten, diese Art der Lösung ist aber für einen Schüler nicht machbar:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{S} &= |\text{isotroper Strahlungsquelle}| = \frac{P}{4\pi r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{P}{4\pi r^3}\overrightarrow{r} \\
\overrightarrow{dA} &= dxdy \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \overrightarrow{S}|_{z=3,5m} \cdot \overrightarrow{dA} &= \iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \frac{P}{4\pi\sqrt{(3,5m)^2+x^2+y^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3,5m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy \\
&= \frac{3,5P}{4\pi} \iint_{x,y=0}^{x,y=3,5m} \frac{dxdy}{\sqrt{(3,5m)^2+x^2+y^2}^3} \\
&= \frac{3,5P}{4\pi} 0,1496 \\
&= 0,042667 \cdot P
\end{aligned}
$$

   Dies ist die absorbierte Leistung eines Viertels der Decke, durch Multiplikation mit 4 und der Zeit erhält man die absorbierte Energie

$$W_{abs} = 10000J.$$

   Hinweis II: Mit der Annahme der Erhaltung der Energie kann man den Poytingvektor auch einfacher über ein Raumwinkelelement von $4\pi/6$ im Abstand $r = 1m$ integrieren, dies liefert

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega=2\pi/3} \frac{P}{4\pi r^2}|_{r=1m}\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_r} d\Omega &= \frac{P}{4\pi}\int_{\Omega=2\pi/3} d\Omega \\
&= \frac{P}{4\pi}\frac{2\pi}{3} \\
&= \frac{P}{6},
\end{aligned}
$$

   ist aber von der Argumentation wohl äquivalent zur einfachen Lösungsvariante.

2. Die Absorption eines Photons der Wellenlänge 97,2 nm bedeutet mit $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ eine Energieänderung von

$$\Delta E = \frac{1,986 \times 10^{-26} Nm^2}{97,2 \times 10^{-9} m} = 2,044 \times 10^{-19} J$$

   bzw.

$$\Delta E = \frac{1,24 \times 10^{-6} eVm}{97,2 \times 10^{-9} m} = 12,757eV.$$

   Das Wasserstoffatom befindet sich nach der Absorption also im Zustand der Energie

$$
\begin{aligned}
E &= -13,605eV + 12,757eV \\
&= -0,848eV,
\end{aligned}
$$

was nach der Formel $E_n = -13,605eV/n^2$ einer Quantenzahl von $n = 4$ entspricht.
Dieses Ergebnis kann natürlich auch gleich mit der Rydbergformel (für $\lambda = 97,2nm$ und $n_1 = 1 < n_2$) erhalten werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \\ \frac{1}{n_2^2} &= 1 - \frac{1}{R\lambda} = 1 - \frac{1}{R\lambda} = 0,0625 \\ n_2 &= 3,99 \approx 4.\end{aligned}$$

Mögliche Übergänge in den Grundzustand sind (die Wellenlängen werden mit der Rydbergformel bestimmt):

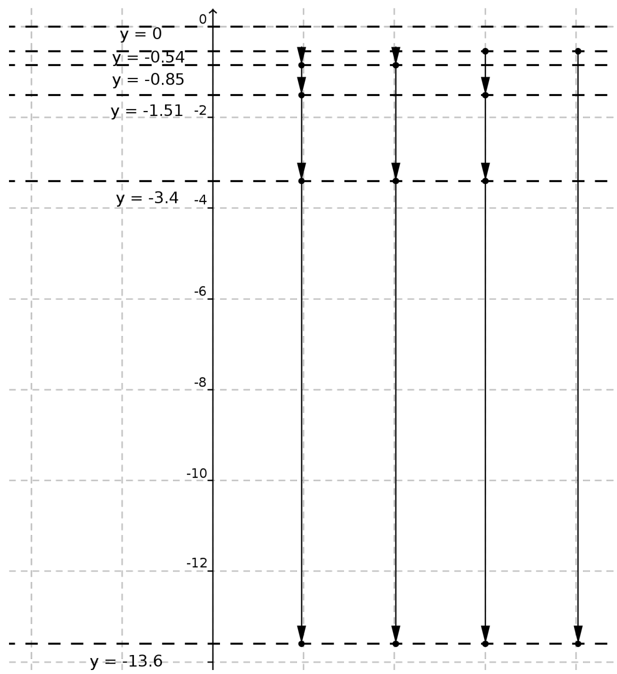


Abbildung 1: Die möglichen Übergänge von $n = 4$ zu $n = 1$

(a) $4 \to 1$: Einphotonenübergang $\lambda_{41} = 97,2nm$, dies ist die Umkehrung der ursprünglichen Absorption

(b) $4 \to 3 \to 2 \to 1$: Dreiphotonenübergang $\lambda_{43} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)^{-1} = 1874nm$; $\lambda_{32} = 656nm$; $\lambda_{21} = 121nm$

(c) $4 \to 3 \to 1$: Zweiphotonenübergang $\lambda_{43} = 1874nm$; $\lambda_{31} = 102nm$

(d) $4 \to 2 \to 1$: Zweiphotonenübergang $\lambda_{42} = 486nm$; $\lambda_{21} = 121nm$

Sichtbares Licht entspricht Wellenlängen von 380nm bis 780nm, also liegen nur die Übergänge λ_{32} und λ_{42} in diesem Bereich.

3. Nach de Broglie kann jedem Teilchen mit der Masse m und dem Impuls p eine Wellenlänge zugeordnet werden (Materiewelle), $\lambda = \frac{h}{p}$. Mit der klassischen Energie-Impuls Relation $E_{kin} = p^2/(2m)$ kann man dies schreiben als

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}.$$

Die gegebenen Energien im Diagramm entsprechen bereits den kinetischen Energien, da $E_{pot} = 0$ im Inneren des Potentialtopfes. Die Forderung stehender (Materie-)Wellen liefert die Bedingung.

$$l = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}.$$

Durch Kombinieren dieser beiden Gleichungen erhält man also

$$\begin{aligned} m &= \frac{h^2}{2 \cdot (\lambda_n)^2 \cdot E_n} = \frac{h^2 n^2}{8 \cdot l^2 \cdot E_n} = 1,33 \times 10^{-11} \frac{(eVs)^2}{m^2} \frac{n^2}{E_n} \\ &= 1,2 \frac{MeV}{c^2} \frac{n^2}{E_n/eV} \end{aligned}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert dann die Werte aus Tabelle 1.

n	$E_n\,[eV]$	$m\,\left[MeV/c^2\right]$
1	2,6	0,461
2	9,4	0,511
3	21,1	0,512
4	37,6	0,511
5	58,8	0,510
6	84,6	0,511

Tabelle 1: berechnete Massen

Das arithmetische Mittel der Ergebnisse liefert dann

$$\overline{m} = 0,503 \frac{MeV}{c^2} = 0,503 \cdot 1,783 \times 10^{-30} kg = 8,96 \times 10^{-31} kg,$$

was ungefähr der Masse eines Elektrons entspricht. Hinweis: Vernachlässigt man den Ausreisser, so erhält man den exakten Wert von $0,511 \frac{MeV}{c^2}$.