Frage 2

Ein Elektron und ein Positron (das Antiteilchen des Elektrons mit gleicher Masse und entgegengesetzer Ladung), bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zu. Beide Teilchen besitzen eine Gesamtenergie von $1{,}51\,MeV$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Positrons im Bezugssystem des Elektrons bei Kenntnis der Ruhemasse des Elektrons von $0{,}511\,\frac{MeV}{c^2}$?

Lösung:

Zuerst ist die Geschwindigkeit im Laborsystem zu bestimmen. Im Folgenden ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ der *Lorentzfaktor* und $\beta = \frac{v}{c}$ die *Relativgeschwindigkeit*. Ausgehend von der *Äquivalenz von Masse und Energie*:

$$E = \overbrace{m}^{\gamma \cdot m_0} \cdot c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{E}{m_0 \cdot c^2} = \frac{1{,}51\,\cancel{MeV}}{0{,}511\,\frac{\cancel{MeV}}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2}} = 2{,}955$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}941$$

$m = \gamma \cdot m_0$ ist die relativistischen Masse.

Nebenbemerkung: Bei der Bestimmung der Positronengeschwindigkeit bzgl. im *Elektronensystem* handelt es sich um ein Beispiel für eine *relativistische Geschwindigkeitsaddition*. Diese erfolgt über folgende Formel:

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u \cdot v'}{c^2}}$$

Dabei bewegt sich ein Bezugssystem mit der Geschwindigkeit u bzgl. des Laborsystems. Im bewegten System (bzw. bzgl des bewegten Systems) bewegt sich ein Objekt mit der Geschwindigkeit v'. v ist dann die Geschwindigkeit des Objektes bzgl. des Laborsystems.

Fortsetzung der Lösung: In unserem Beispiel ist das Elektron das bewegte System (bzw. das Elektron ruht im bewegten System) von dem man $u = 0{,}941 \cdot c$ kennt, das Positron ist das bewegte Objekt von dem wir $v = -0{,}941 \cdot c$, also die Geschwindigkeit bzgl. des Laborsystems *"bereits"* kennen. Da wir die Geschwindigkeit des Positrons bzgl. des vom Elektron mitbewegten Systems suchen, muss die Formel für die Geschwindigkeitsaddition auf v' umgestellt werden (hier ohne Teilschritte):

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u \cdot v'}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}} = \frac{-0{,}941 \cdot c - 0{,}941 \cdot c}{1 - \frac{-0{,}941 \cdot 0{,}941 \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}} = -0{,}997 \cdot c$$

Als Geschwindigkeit ergibt sich somit $-0{,}997 \cdot c = -2{,}9925 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$, also auf das Elektron zu.