

## Problemstellung 2

Im Jahr 1896 hat der Astronom Edward Charles Pickering das Emissionsspektrum des Sterns Zeta Puppis untersucht. Er hat hierbei einige Emissionslinien entdeckt, deren Wellenlängen denen der Balmerreihe entsprechen, woraus er auf die Anwesenheit von Wasserstoff im Stern schloss. Er hat weitere drei Spektrallinien entdeckt - genannt Pickering Linien - deren Wellenlängen gemessen wurden zu

$$455,1\text{nm}; \quad 541,1\text{nm} \quad \text{und} \quad 1012,3\text{nm}.$$

1. Beschreibe im Bezug auf das Bohrsche Atommodell den Ursprung der Spektrallinien des Wasserstoffes. Formuliere in Analogie hierzu eine mögliche Erklärung für die Pickering-Linien, die im Emissionsspektrum von Zeta Puppis enthalten sind. Gib an, welche physikalischen Informationen man aus deren numerischen Wert gewinnen kann.

Pickering stellte fest, dass die Wellenlängen der nach ihm benannten Linien mit der Balmer-Formel

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

berechnet werden können, welche für das Wasserstoffatom gilt. Allerdings erhielt er hierbei halbzahlige Werte für  $n$ .

2. Benutze die in folgender Tabelle gegebenen numerischen Werte für das Spektrum des Wasserstoffatoms, um graphisch oder rechnerisch den Wert der Rydbergkonstante  $R_H$  zu bestimmen. Berechne dann die halbzahligen Werte für  $n$ , die den Pickering-Linien entsprechen.

| $n$ | $\lambda [nm]$ |
|-----|----------------|
| 3   | 656,3          |
| 4   | 486,1          |
| 5   | 434,1          |
| 6   | 410,2          |
| 7   | 397,0          |

Tabelle 1: Die Balmerreihe für das Wasserstoffatom

Die Pickering-Linien können auch mit einer modifizierten Form der Balmer-Formel berechnet werden, wenn man einen anderen Wert für den Parameter  $R_H$  benutzt, den wir mit  $R'_H$  bezeichnen:

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H \left( \frac{1}{(n_1)^2} - \frac{1}{(n_2)^2} \right),$$

wobei die Zahlen  $n_1 (= 1, 2, 3, \dots)$  und  $n_2 (= 1, 2, 3, \dots)$  jetzt ganze Zahlen sind mit der Einschränkung

$$n_2 > n_1.$$

3. Zeige, dass man für  $n_1 = 4$  und  $R'_H = 4 \cdot R_H$  ganze Zahlen als Werte von  $n_2$  erhält, welche alle beobachteten Linien beschreibt, d.h. die der Balmer-Linien für das Wasserstoffatom und der Pickering-Linien.

In der folgenden Zeit wurde gezeigt, dass das gesamte Emissionsspektrum von Zeta Puppis nicht von Wasserstoffatomen kommen kann, sondern der Gegenwart von Wasserstoffähnlichen Ionen geschuldet ist (das sind Ionen, die nur ein Elektron besitzen, deren Kern aber  $Z$  Protonen enthält), welche ebenfalls durch das Bohrsche Atommodell beschrieben werden können.

4. Das Bohrsche Atommodell für das Wasserstoffatom liefert als Wert für die Rydbergkonstante den Ausdruck:

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c}.$$

Bestimme den Wert von  $R'_H$  indem Du angibst, welche Änderungen am Bohrschen Atommodell für ein Wasserstoffähnliches Ion vorzunehmen sind. Indem man dieses Resultat mit dem experimentellen Wert von  $R'_H$  vergleicht, kann auf den Wert von  $Z$  geschlossen werden. Bestimme diesen Wert und schliesse hieraus, auf welches Ion das Emissionsspektrum von Zeta Puppis zurückzuführen ist.

## Lösung Problemstellung 2

- Ein Emissionsspektrum entsteht (sowohl im Bohrschen Atommodell wie auch in der komplett quantenmechanischen Beschreibung) durch Übergänge der Elektronen zwischen verschiedenen Energieniveaus. Beide Modelle sagen diskrete Energieniveaus vorher (der wesentliche Unterschied ist, dass man im Bohrschen Atommodell auch noch von einer scharf begrenzten Elektronenbahn sprechen kann). Diese Energieniveaus werden durch ganzzahlige Quantenzahlen  $n$  beschrieben:  $E_n$ . Die Energiedifferenz

$$E_n - E_m = h \cdot f$$

wird in Form eines Photons abgegeben, siehe Abb. 1. Diese Relation kann man mit  $f = \frac{c}{\lambda}$  und  $E_n \propto \frac{1}{n^2}$  auch schreiben als

$$\frac{1}{\lambda} \propto \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

woraus ersichtlich ist, dass die Wellenlängen ebenfalls nur diskrete Werte annehmen können. Aus den Wellenlängen der Linien kann man also durch eine Ausgleichsrechnung auf die beteiligten Quantenzahlen schliessen. Wenn dies zur Zufriedenheit geschehen ist, kann man auch die Proportionalitätskonstante bestimmen, welche in diesem Fall die im Weiteren betrachtete Rydbergkonstante für das Wasserstoffatom ist.

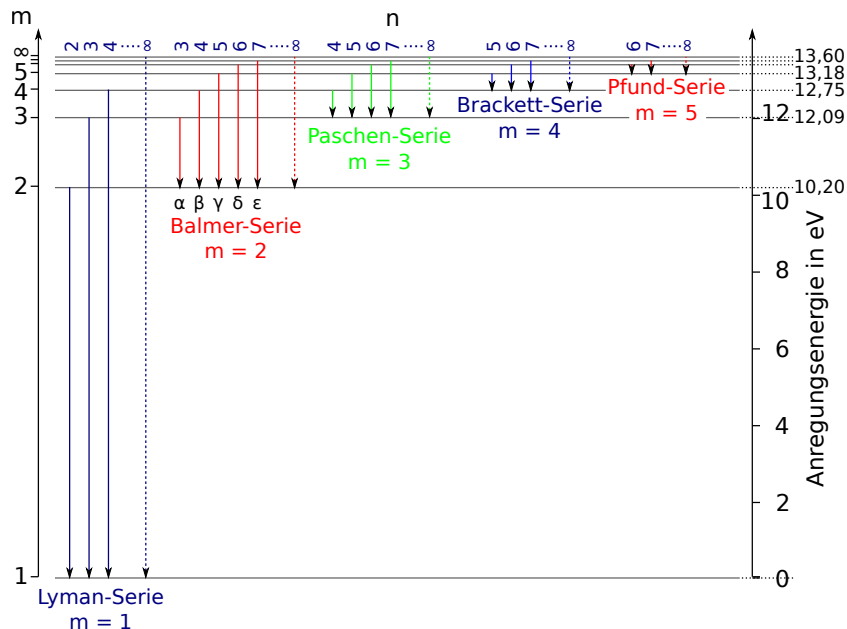


Abbildung 1: Das Wasserstoff Termschema (aus [1])

- Durch Umstellen der gegebenen Balmer Formel erhält man

$$R_H = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}},$$

womit man die gegebene Tabelle ergänzen kann:

| $n$ | $\lambda [nm]$ | $R_H \left[ \frac{1}{nm} \right]$ |
|-----|----------------|-----------------------------------|
| 3   | 656,3          | 0,010971                          |
| 4   | 486,1          | 0,010972                          |
| 5   | 434,1          | 0,01097                           |
| 6   | 410,2          | 0,01097                           |
| 7   | 397,0          | 0,010971                          |

Tabelle 2: Die Berechnung der Rydbergkonstante

Durch Mittelwertbildung erhält man

$$\begin{aligned}
 R_H &= 0,010971 \frac{1}{nm} \\
 &= 1,0971 \times 10^7 \frac{1}{m},
 \end{aligned}$$

was eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert ( $R_H = 10973731,568508(65)m^{-1}$ ) ergibt. Für die graphische Lösung dieser Aufgabe muss man ein Diagramm zeichnen, auf dessen x-Achse der Wert  $(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2})$  aufgetragen wird und auf der y-Achse die Kehrwerte der Wellenlängen. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden erhält man dann den Wert der Rydbergkonstante (Dies dürfte von Hand gezeichnet allerdings wesentlich ungenauer ausfallen als der rechnerische Lösungsweg):

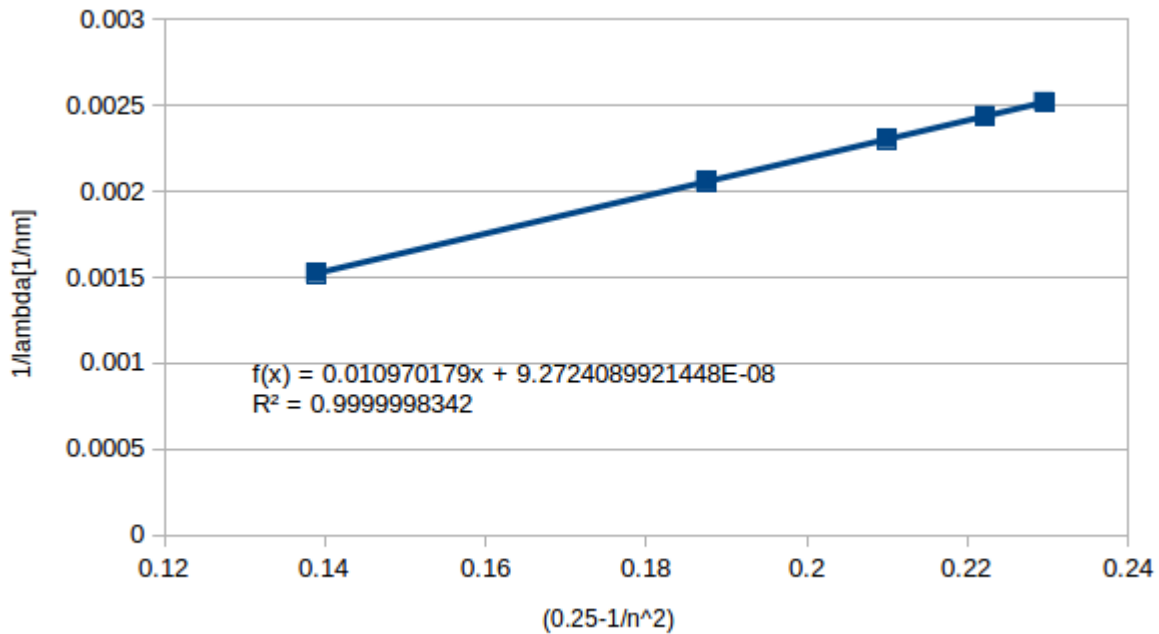


Abbildung 2: graphische Bestimmung der Rydberkkonstante

Zur Berechnung der Quantenzahlen für die Pickering-Linien erstellt man folgende Tabelle (mittels  $n = (\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda \cdot R_H})^{-\frac{1}{2}}$ )

| $\lambda [nm]$ | $n$                 |
|----------------|---------------------|
| 455,1          | 4,485 $\approx$ 4,5 |
| 541,1          | 3,502 $\approx$ 3,5 |
| 1012,3         | 2,500 $\approx$ 2,5 |

Tabelle 3: Die Berechnung der Quantenzahlen für die Pickering-Linien

Hieraus ist ersichtlich, dass die Quantenzahlen für die Pickering-Linien - wie behauptet - halbzahlig sind.

- Mit der gegebenen Formel und für  $n_1 = 4$  und  $R'_H = 4 \cdot R_H$  kann man folgende Tabelle erstellen (mittels  $n_2 = (\frac{1}{16} - \frac{1}{\lambda \cdot 4 \cdot R_H})^{-\frac{1}{2}}$ ):

| $\lambda_{Pickering} [nm]$ | $n_2$             | $\lambda_{Wasserstoff} [nm]$ | $n_2$               |
|----------------------------|-------------------|------------------------------|---------------------|
| 455,1                      | 8,970 $\approx$ 9 | 656,3                        | 5,999 $\approx$ 6   |
| 541,1                      | 7,004 $\approx$ 7 | 486,1                        | 8,001 $\approx$ 8   |
| 1012,3                     | 5,001 $\approx$ 5 | 434,1                        | 9,997 $\approx$ 10  |
|                            |                   | 410,2                        | 11,998 $\approx$ 12 |
|                            |                   | 397,0                        | 14,004 $\approx$ 14 |

Tabelle 4: Die Berechnung der Quantenzahlen für die Pickering-Linien und die Wasserstofflinien mit der modifizierten Rydbergkonstante

Hieraus ist ersichtlich, dass alle beobachteten Linien von einem Ion kommen können; die Pickering Linien füllen genau die Lücken der “Wasserstoff”-Linien. Mit beiden Tabellen hat man (fast) alle Übergänge, die im Energieniveau  $n_1 = 4$  “landen” bis zu  $n_2 = 14$ .

- An dieser Stelle soll nicht die Herleitung der Energieniveaus von Wasserstoffähnlichen Ionen mit dem Bohrschen Atommodell erfolgen, sondern nur die notwendigen Änderungen in den Ansätzen, die zu diesen führen. Ausgangspunkt des Bohrschen Atommodells ist, dass die Coulombkraft zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom als Zentripetalkraft wirkt (hierbei stammt das  $e^2$  von  $q_{proton} \cdot q_{Elektron}$ !):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Das Bohrsche Postulat der Drehimpulsquantisierung  $L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$  (oder äquivalent: Ausbildung einer stehenden Welle mit der de-Broglie Wellenlänge des Elektrons) führt dann auf diskrete Radien und Energien. Von diesen beiden Gleichungen muss für Wasserstoffähnliche Ionen nur das Kräftegleichgewicht modifiziert werden (da  $q_{elektron} = e$  und  $q_{Kern} = Z \cdot e$ ):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Alle folgenden Berechnungen ändern sich nur durch die Ersetzung  $e^2 \rightarrow Z \cdot e^2$  bzw.  $e \rightarrow \sqrt{Z} \cdot e$ . Betrachtet man nun den gegebenen Ausdruck für die Rydbergkonstante

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c}$$

und führt obige Ersetzung durch, so erhält man

$$R'_H = \frac{m_e Z^2 e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c}$$

und schließlich (mit  $R'_H = 4R_H$ )

$$Z = 2.$$

Das beobachtete Spektrum wird also von einem Wasserstoffähnlichen Ion mit  $Z = 2$  erzeugt, es handelt sich also um ein  $He^+$ -Ion.

## Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Balmer-Serie> (Von PNG: w.de:user:Kiko2000; SVG: Cepheiden - SVG-conversion: Eigenes Werk (own work), CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6501211> )