Ordentlicher Termin 2026
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell'Istruzione e del Merito

H002 - REIFEPRÜFUNG

Realgymnasium
Realgymnasium mit Schwerpunkt Angewandte Naturwissenschaften

Fach: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

«Soweit sich die Gesetze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher; und soweit sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.»

Albert Einstein, *Geometrie und Erfahrung*, Vortrag von 1921

PROBLEMSTELLUNG 1

Die Tabelle zeigt die jeweils zu Jahresbeginn durchgeführten Messungen des Wasserstands des Bracciano Sees ab dem Jahr 2016. In den Jahren 2016 und 2017 wurde der See als Wasserreserve für Notfälle angrenzender Gemeinden und für die Versorgung von Rom verwendet. Angesichts der Umweltauswirkungen und des erheblichen Absinkens des Wasserstands im Vergleich zu dem als optimal gesehenen Niveau wurde im Jahr 2017 entschieden, die Wasserentnahmen zu stoppen. Diese Aussetzung besteht bis heute.

Jahr (ab 1. Jänner)	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Differenz zwischen dem Wasserstands-niveau und dem hydrometrischen Nullniveau (in dm)	- 6	- 16	- 20	- 18	- 16	- 14	- 12	- 10	- 10	- 10	- 10

Wählen Sie ein Koordinatensystem, in dem eine Einheit auf der Abszissenachse einem Jahr entspricht, beginnend bei Null mit dem 1. Jänner 2016, während eine Einheit auf der Ordinatenachse einer Differenz von 1 dm im Vergleich zum hydrometrischen Nullniveau (optimales Niveau) entspricht.

H002 - REIFEPRÜFUNG

Von Anfang 2016 bis Anfang 2019 kann der Wasserpegelstand näherungsweise durch die Polynomfunktion

$$y = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

Im Zeitraum zwischen Anfang 2019 und Anfang 2023 nimmt man ein oszillierendes Wachstum an, das näherungsweise durch die Funktion $y = mx - 24 + sin^2(\pi x)$, mit $m \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Bis Anfang 2026 kann der Verlauf durch die Funktion $\mathrm{y} = 2\cos(2\pi x) + k$, mit $k \in \mathbb{R}$, dargestellt werden.

a) Verwenden Sie die Daten aus der Tabelle und die gegebenen Informationen. Definieren Sie ein mathematisches Modell $f(x)$, das den zeitlichen Verlauf des Wasserpegels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, nachdem Sie die Werte der Parameter bestimmt haben.

Ab jetzt gilt für die Beschreibung des Wasserstandes die folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20, & 0 \le x < 3 \\ 2x - 24 + sin^2(\pi x), & 3 \le x \le 7 \\ 2\cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \le 10 \end{cases}$$

b) Untersuchen Sie f und zeichnen Sie anschließend den Graphen, nachdem Sie die Stetigkeit gezeigt, die Differenzierbarkeit überprüft und die lokalen Extrempunkte ermittelt haben.

c) Begründen Sie, dass das Theorem von Lagrange (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) für die Funktion f im Intervall $[0; 10]$ nicht anwendbar ist.

Existieren Punkte mit Abszisse $s \in]0; 10[$ für die $f'(s) = \frac{f(10) - f(0)}{10}$ ist?

Begründen Sie die Antwort.

H002 - REIFEPRÜFUNG

d) Erklären Sie, warum der Mittelwertsatz der Integralrechnung für die Funktion f im Intervall $[0; 10]$ anwendbar ist. Berechnen Sie dann die durchschnittliche Abweichung Δh des Wasserpegels für den Zeitraum der Erhebung.
Unter der Annahme, dass die Fläche des Sees ungefähr 57 km^2 beträgt, verwenden Sie Δh um die Differenz des Wasservolumens in Litern zwischen Anfang des Jahres 2016 und Anfang des Jahres 2026 abzuschätzen.

PROBLEMSTELLUNG 2

Seien φ_a und γ die Graphen der Funktionen:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \text{ für } a \neq 0 \qquad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f_a in Abhängigkeit des Parameters a. Bestimmen Sie die Werte für a und k, so dass die Gerade mit der Gleichung $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$) eine Tangente der Graphen φ_a und γ ist.

b) Seien A und B jeweils die Extrempunkte der Graphen φ_a und γ, mit $x_A \neq 0$ und $x_B > 0$. Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Länge der Strecke AB minimal ist.

Ab jetzt gilt: $a = \frac{1}{8}$.

c) Diskutieren Sie die Funktionen $f_{\frac{1}{8}}$ und g. Untersuchen Sie dabei insbesondere deren Stetigkeit und Differenzierbarkeit und zeichnen Sie ihre Graphen $\varphi_{\frac{1}{8}}$ und γ in einem geeigneten Koordinatensystem. Nutzen Sie die Graphen um die Ungleichung $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$ zu lösen.

d) Bestimmen Sie die Fläche, die durch γ, der x-Achse und der Parallelen zur y-Achse, die durch die Wendepunkte gehen, begrenzt wird.

Ministero dell'Istruzione e del Merito

H002 - REIFEPRÜFUNG

FRAGESTELLUNGEN

1. Cecilia zeigt Nicolò eine Variante des Spiels “Cover the spot”: Zeichne auf ein Blatt Papier ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ dm und schneide drei Kreise aus Karton mit Radius $\frac{2}{3}$ dm aus. Das Ziel des Spiels ist es, die größtmögliche Fläche des Quadrates mithilfe der drei Kreise zu bedecken. Cecilia legt anfangs einen Kreis, sodass der Mittelpunkt des Kreises auf der Diagonalen AC des Quadrates liegt und der Rand des Kreises durch A geht. Vor dem Positionieren des zweiten Kreises behauptet sie, dass bereits mehr als die Hälfte des Quadrates bedeckt sei, während Nicolò meint, dass dies nicht richtig sei.
   Wer hat Recht? Begründen Sie die Antwort.
2. Im dreidimensionalen Raum sind die Punkte $A(2; -4;\ 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1;\ 0)$, $D(-1;\ 4;\ 8)$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass A, B, C, D die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders sind.

   b) Die Eckpunkte A, B, C, D liegen auf einer Kugeloberfläche. Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt A auf der Kugeloberfläche.

3. Ein großes Gebiet im Norden von Udine wurde im Mai und September 1976, also vor 50 Jahren, von Erdbeben der Stärke $M_1 = 6{,}5$ und $M_2 = 6{,}0$ auf der Richterskala erschüttert.

   Die Erdbebenstärke M laut Richterskala wird durch $M = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)$ beschrieben, dabei gibt A die maximal gemessene Amplitude am Seismographen und A_0 die Nullamplitude eines Referenzwertes an.

   Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{A_1}{A_2}$ zwischen den zwei gemessenen Erdbebenereignissen in diesem Gebiet.

   Bestimmen Sie die prozentuelle Änderung der freigesetzten Energie zwischen dem ersten und zweiten Erdbeben mit dem empirischen Gesetz von Gutenberg-Richter $\log_{10}\frac{E}{E_0} = 1{,}5M + 4{,}8$, wobei E die freigesetzte Energie des Erdbebens ist und E_0 die Referenzenergie.

Ministero dell' Istruzione e del Merito

H002 - REIFEPRÜFUNG

4. Gegeben sei die Funktion $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (für $x>0$).

   Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x)$ eine konstante Funktion ist und bestimmen Sie deren Wert.

5. Gegeben sei die Funktion mit der Gleichung $y=h\ln(x^2+k)^5$ mit den senkrechten Asymptoten $x=-\sqrt{3}$ und $x=\sqrt{3}$ und den Tangenten durch die Punkte A und B, die auf der Abszissenachse liegen und sich im Punkt $C(0;-4)$ schneiden.

   Bestimmen Sie die Werte der reellen Parameter h,k, für $h\neq 0$.

6. Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$, sodass der Graph der Funktion $f(x)=\frac{p(x)}{2x+1}$ durch den Punkt $P(1;0)$ geht und die Gerade $y=3x-2$ eine schiefe Asymptote ist.

7. Giuseppe, Lorenzo, Massimo und Vincenzo spielen eine Partie des Kartenspiels “Scopone”. Am Anfang erhält jeder Spieler zufällig 10 von 40 Spielkarten. Die Spielkarten sind in 4 Farben unterteilt (10 Münzen, 10 Kelche, 10 Stäbe, 10 Schwerter).

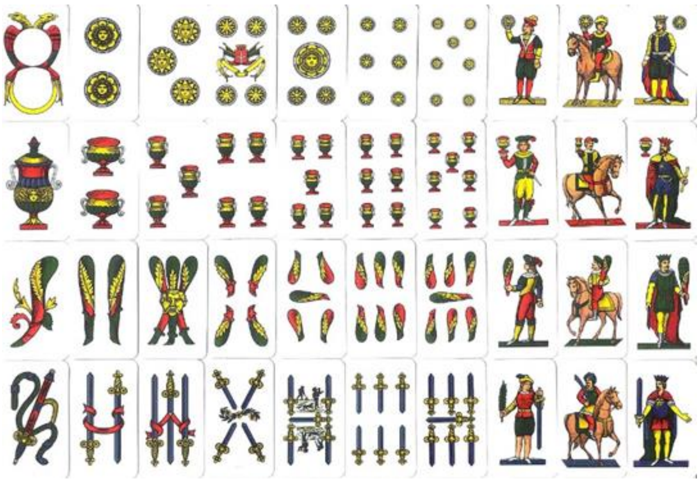

Abb. Neapolitanische Spielkarten des Spiels „Scopone“
(in Wikipedia; abgerufen am 20. Mai 2026 unter: it.wikipedia.org/wiki/Scopone)

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 3 Karten, die Massimo erhält, 3 Kelche sind.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 10 Karten, die Lorenzo erhält, je das Ass von den Stäben, den Münzen und den Schwertern dabei ist.

H002 - REIFEPRÜFUNG

8. Bei einem internationalen Volleyballturnier nehmen 16 Mannschaften teil, die folgendermaßen in 4 Gruppen (A, B, C, D) mit jeweils 4 Mannschaften unterteilt werden:

   Die 16 teilnehmenden Mannschaften werden, basierend auf der aktuellen Rangliste, zunächst in drei Töpfe aufgeteilt: 4 Mannschaften in Topf 1, 4 Mannschaften in Topf 2 und 8 Mannschaften in Topf 3. Die 4 Mannschaften aus Topf 1 werden entsprechend der Rangliste den Gruppen A, B, C, D zugeordnet (ohne jegliche Auslosung). Die anderen Mannschaften werden ausgelost, sodass in jeder Gruppe eine Mannschaft aus Topf 2 und zwei Mannschaften aus Topf 3 vorkommen.

   Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppenzusammensetzung A, B, C, D gibt es?

«*Reine Mathematik ist das beste Spiel der Welt. Sie ist fesselnder als Schach, gewagter als Poker und dauert länger als Monopoly. Sie ist kostenlos. Man kann sie überall spielen — Archimedes tat es in einer Badewanne*.»

Richard J. Trudeau, *Dots and lines,* Kent State University Press, 1976

Dauer der Arbeit: 6 Stunden
Der Gebrauch wissenschaftlicher und/oder grafischer Taschenrechner ist erlaubt, sofern diese nicht mit einem CAS (Computer Algebra System) oder SAS (Symbolic Algebra System) ausgestattet sind und keine Verbindungsmöglichkeit zum Internet aufweisen.
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Kandidatinnen und Kandidaten nicht deutscher Muttersprache erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.