Problemstellung 1

1. $g'(x) = 0$ ist die notwendige Bedingung für Extremwerte. Vereinfacht man den Term g', so erhält man das Produkt $e^{2x-x^2} \cdot (-2ax^2 + (2a-2b)x + 2b + a)$. Der erste Faktor ist immer positiv, also nie null, deshalb muss der Klammerausdruck betrachtet werden: Nullstellen hat dieser (für x) quadratische Term dann, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung positiv ist, also $(2a-2b)^2 - 4(-2a)(2b+a) = 4(3a^2 + 2ab + b^2) = 4(2a^2 + (a+b)^2)$. Weil die Summe von zwei Quadraten immer positiv ist, ist auch der gesamte Term positiv und deshalb hat die quadratische Gleichung immer die geforderten zwei Lösungen.

   Dass es sich bei den entsprechenden Lösungen um absolute Extremwerte handeln muss, liegt daran, dass $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ ist.

   Setzt man $x = 2$ und $y = 1$ in die Funktionen ein, erhält man das lineare Gleichungssystem

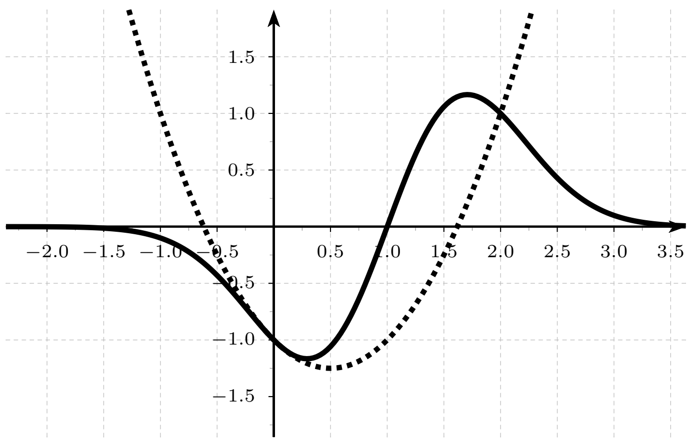
$$\begin{cases} 1 = 4a - 2 + b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

   mit der Lösung $a = 1$ und $b = -1$.

2.
   - Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - x - 1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ und den Nullstellen $x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

     Die Funktion $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$ hat die einzige Nullstelle $x = 1$. An den Stellen $x_{1/2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ gibt es 2 Extremwerte und mit Hilfe der 2. Ableitung $g''(x) = 2e^{2x-x^2}(2x^3 - 6x^2 + 3x + 1)$ erkennt man, dass g drei Wendepunkte an den Stellen $x_1 = 1$, $x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ besitzt.

     Der Graph von g ist zwischen den beiden Extremwerten streng monoton steigend, sonst überall fallend.



   - Verschiebt man den Graphen von g horizontal um eine Einheit nach links, so erhält man die Funktion $g^*(x) = g(x+1) = x \cdot e^{2(x+1)-(x+1)^2} = x \cdot e^{1-x^2}$. Die Funktion ist ungerade:

$$\begin{aligned} g^*(-x) &= -g^*(x) \\ -x \cdot e^{1-(-x)^2} &= -(x \cdot e^{1-x^2}) \\ -x \cdot e^{1-x^2} &= -x \cdot e^{1-x^2} \end{aligned}$$

     Damit ist g^* punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs und deshalb ist g symmetrisch bezüglich des Punktes (1,0).

   - Die Funktionsgraphen berühren sich im Punkt $B(0; -1)$, da beide Graphen durch diesen Punkt verlaufen und an dieser Stelle die gleiche Tangentensteigung von -1 aufweisen.

- Um die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen zu erhalten werden beide Funktionsgraphen so verschoben, dass die Fläche gänzlich im I. Quadranten liegt, dies ist beispielsweise für die Funktionsgraphen $f_1(x) = f(x) + 2 = x^2 - x + 1$ und $g_1(x) = g(x) + 2 = (x-1)e^{2x-x^2} + 2$ der Fall.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 g_1(x) - f_1(x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} + 2x - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)\right]_0^2 \\
&= \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

3. Die Zirkulation (Wegintegral) des magnetischen Feldes lässt sich nach dem Ampereschen Gesetz folgendermaßen berechnen:
   $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{ges}$
   I_{ges} ist der gesamte Strom, der vom Rand der Fläche S eingeschlossen wird.
   Da I_3 außerhalb liegt, spielt dieser Strom für die Zirkulation keine Rolle.
   Hat I_2 die gleiche Richtung wie I_1, so wird die Zirkulation größer, bei entgegengesetzter Richtung heben sich die Ströme teilweise auf.

4. $U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} = -\frac{d(BA\cos(\measuredangle(\vec{B};\vec{A})))}{dt} = -\frac{d(BA\cos(\omega t))}{dt} = \omega BAsin(\omega t)$, die Amplitude ist also ωBA.
   Die Fläche wurde bereits berechnet, $A = S = 4/3m^2$
   Für das Maximum der Stromstärke gilt $I_{max} = \frac{U_{max}}{R} = \frac{\omega BA}{R}$
   Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \frac{I_{max}R}{BA} = 1/20s^{-1}$

Problemstellung 2

1. Die Einheit von a ist die gleiche wie von t, also Sekunde s.
   Stellt man die Formel nach k um, so ergibt sich die Einheit dieser Konstanten zu $\frac{Ts^2}{m}$.
   Das sich ändernde elektrische Feld generiert im Kondensator nach Maxwell einen Verschiebungsstrom, der von einem Magnetfeld umgeben ist.
   Dieses Magnetfeld ist ringförmig um den Verschiebungsstrom und somit senkrecht zur elektrischen Feldstärke.

2. Die Zirkulation (Wegintegral) von B entlang des Kreises C ist $\oint \vec{B}d\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^2 kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$, da das Magnetfeld entlang des Kreisumfanges konstant ist.
   Der elektrische Fluss ist $\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$
   Mit Hilfe des Ampere-Maxwellschen Gesetzes ohne eingeschlossenen Strom ist

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
B \cdot 2\pi r &= \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{E}) \\
\frac{2\pi r^2 kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} &= \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{E})
\end{aligned}
$$

   Man kann die rechte Seite Integrieren (die Integrationskonstante erhält man, indem man den elektrischen Fluss zur Zeit $t = 0$ null setzt, da die angelegte Spannung null ist) oder den vorgegebenen Ausdruck ableiten. Mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ wird die Richtigkeit der Formel bestätigt.
   Die elektrische Spannung erhält man aus dem Gaußschen Satz $\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{CU}{\varepsilon_0}$

Für die Kapazität des Plattenkondensators gilt: $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2}{d}$

Daher ist die Spannung $U = \frac{2kd}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)$, wobei hier R der Radius des Plattenkondensators ist.

Einfacher ist die Herleitung der Spannung über $U = E \cdot d = \frac{\Phi(E)}{A} d$.

Für große Zeiten ist der Grenzwert für B gleich $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{kt}{t^3\sqrt{1+(a/t)^2}} \cdot r = 0$.

Aus der Formel für die Spannung sieht man, dass U für große Zeiten gegen einen konstanten Wert geht. Ohne eine sich zeitlich ändernde Spannung existiert auch kein Magnetfeld mehr.

3. Der Graph von F verläuft durch den Ursprung, da $F(0) = 0$ ist. F ist eine Stammfunktion von f, da

$$F'(t) = -\frac{1}{2} \cdot (t^2+a^2)^{-3/2} \cdot 2t = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = f(t)$$

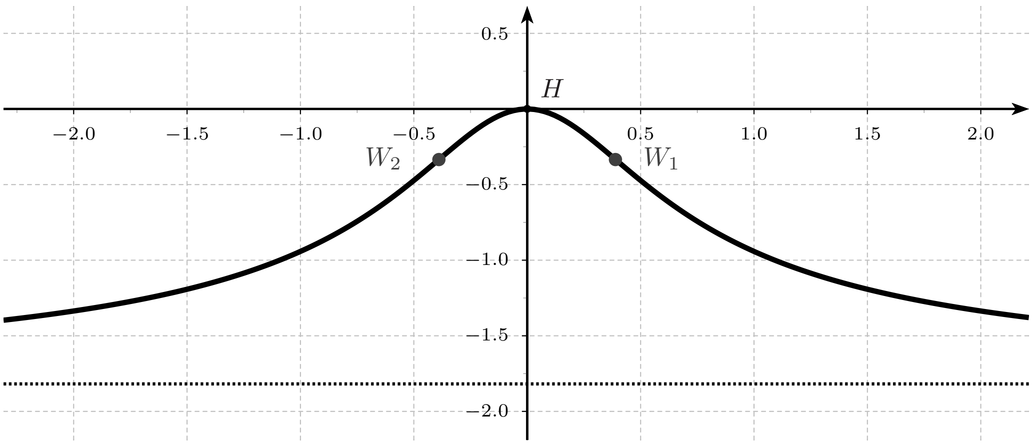
Für jedes beliebige $a > 0$ ist der erste Summand $\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$ kleiner als $\frac{1}{a}$, also ist $F(t) \leqq 0$ und damit verläuft der Graph von F im 3. und 4. Quadranten. Weiters ist die Funktion gerade $(F(-t) = F(t))$ und damit ist der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, dass F im Ursprung ein absolutes Maximum hat.

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t) = -\frac{1}{a}$, also hat F eine horizontale Asymptote $y = -\frac{1}{a}$. Senkrechte Asymptoten hat F keine, da $D = \mathbb{R}$ gilt.

Löst man die Gleichung $F''(t) = f'(t) = \frac{2t^2-a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)^5}} = 0$, so erhält man die Stellen der beiden Wendepunkte $t_{1/2} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Die Steigungen der Tangenten in den Wendepunkten erhält man durch

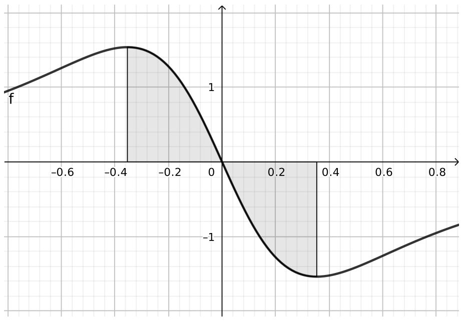
$$F'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \mp\frac{2}{\sqrt{27}a^2}$$



4.
- Die Funktion F hat eine Parallele zur t-Achse als Asymptote; für hinreichend betragsmäßig große t-Werte werden die Tangentensteigungen sehr klein, deshalb hat f die t-Achse selbst als Asymptote.
- F hat im Ursprung einen Extremwert, die Tangentensteigung ist dort null, also hat f dort eine Nullstelle.
- Es ist $F''(t) = f'(t) = 0$, also hat f genau dort die Extremwerte, wo F die Wendepunkte hat.
- Da F gerade ist, ist f ungerade, der Graph der Funktion f ist also punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

- Für $t < 0$ ist F streng monoton wachsend, in diesem Bereich sind die Tangentensteigungen also positiv, deshalb verläuft der Graph von f in diesem Bereich oberhalb der t-Achse (und entsprechend umgekehrt).

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} f(t)dt \\
&= 2 \cdot \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)dt \\
&= 2 \cdot [F(t)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} \\
&= 2 \cdot (0 + (1 - \sqrt{2/3})/a) \\
&= \frac{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}{a}
\end{aligned}$$



Beispielgraphik für $a = \frac{1}{2}$

Da f ungerade ist, gilt natürlich für jedes $b > 0$: $\int\limits_{-b}^{b} f(t)dt = 0$.

Frage 1

An den Stellen der senkrechten Asymptoten muss der Nenner gleich Null sein, damit erhält man $d = -9$.

f hat eine horizontale Asymptote, dies ist genau dann der Fall, wenn der Grad des Zählerpolynoms und der Grad des Nennerpolynoms gleich groß sind, also ist p eine quadratische Funktion mit den gegebenen Nullstellen; so erhält man für f:

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d} = \frac{5x\left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$$

Aus $f'(x) = \dfrac{6(2x^2 - 15x + 18)}{(x^2 - 9)^2} = 0$ ergeben sich die Lösungen $x_1 = \frac{3}{2}$ und $x_2 = 6$ und aus $f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ und $f''(6) > 0$ der Hochpunkt $H = \left(\frac{3}{2}; 1\right)$ und der Tiefpunkt $T = (6; 4)$.

Frage 2

Die Gleichung $g(x) = x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots x^{2016} + x^{2018}) = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$, da der Klammerausdruck für jedes $x \neq 0$ auf Grund der geraden Hochzahlen immer positiv (sogar > 1) ist.

(Alternative Argumentation: $g'(x) > 0$, damit ist $g(x)$ streng monoton steigend und deshalb ist $g(0) = 0$ die einzige Nullstelle.)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1{,}1^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1{,}1^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{1{,}1^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7}{1{,}1^x} + \dots + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{1{,}1^x} \\
&= 0 + 0 + \dots + 0 = 0
\end{aligned}$$

Zur Erklärung: Für jedes beliebige n gilt durch mehrmalige Anwendung der Regel von de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1{,}1^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2n-1)x^{2n}}{1{,}1^x \cdot \ln(1{,}1)} = \dots \lim_{x\to+\infty} \frac{(2n-1)!}{1{,}1^x \cdot (\ln(1{,}1))^{2n-1}} = 0$$

Frage 3

Mit der quadratischen Grundfläche a^2 und der Quaderhöhe h gilt für die Kantenlänge $K(a{,}h) = 8a + 4h$. Gegeben ist die Oberfläche $S = 2a^2 + 4ah$, daraus folgt $h = \frac{S - 2a^2}{4a}$ und eingesetzt in K erhält man die

Kantenlänge in Abhängigkeit von a: $K(a) = 6a + \frac{S}{a}$. Für a kommen nur positive Lösungen in Frage, aus $K'(a) = 6 - \frac{S}{a} = 0$ ergibt sich demnach $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ und da $K''(a) = \frac{S}{a^3}$ für alle $a > 0$ auch immer positiv ist, liegt an der Stelle $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ ein Minimum vor.

Für den Wert von h ergibt sich eingesetzt und vereinfacht ebenfalls $h = \sqrt{\frac{S}{6}}$, demnach ist der Quader mit minimaler Summe der Kantenlängen bei gegebener Oberfläche der Würfel.

Frage 4

Mit $P = (x,y,z)$ folgt aus $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$ die Wurzelgleichung
$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$
und damit durch Vereinfachung und quadratischer Ergänzung: $(x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 48$.
Dies ist die Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt $M = (-6; 4; 3)$ und Radius $r = \sqrt{48}$.

Einsetzen der Koordinaten von T liefert eine wahre Aussage: $(-10+6)^2 + (8-4)^2 + (7-3)^2 = 48$. Deshalb liegt der Punkt T auf der Kugel. Für die Gleichung der Tangentialebene kann die folgende Formel verwendet werden: $(x_T - x_M)(x - x_M) + (y_T - y_M)(y - y_M) + (z_T - z_M)(z - z_M) = r^2$

Einsetzen und vereinfachen liefert die Tangentialgleichung: $x - y - z + 25 = 0$

Vektoriell ergibt sich die Ebenengleichung aus $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x_0}$ mit $\vec{n} = \vec{MT} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x_0} = \vec{OT}$.

Frage 5

1. Entweder man würfelt jeweils eine 1 oder genau einmal eine 2, den Rest Einsen. Für diese insgesamt 5 Möglichkeiten ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:
$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{5}{6^4} \approx 0{,}39\%$$

2. Wenn das Produkt ein Vielfaches von 3 sein soll, dann muss im Wurf mindestens eine 3 oder eine 6 enthalten sein. Wenn das Produkt kein Vielfaches von 3 sein soll, so enthält der Wurf nur die Zahlen 1, 2, 4 oder 5, die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\left(\frac{4}{6}\right)^4$. Damit gilt für die dazu gesuchte Gegenwahrscheinlichkeit:
$$1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 80{,}25\%$$

3. Ein Würfel muss eine 4 zeigen, die restlichen 3 Würfel dürfen keine 5 oder 6 ergeben, dafür gibt es insgesamt 4 Möglichkeiten, demnach:
$$4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3\right) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{16}{81} \approx 19{,}75\%$$

   So wie diese Aufgabenstellung formuliert ist, wäre es auch möglich, dass die 4 mehrmals gewürfelt werden kann.

Frage 6

Die mittlere Stromstärke in einem Zeitintervall Δt lässt sich wie folgt berechnen: $\overline{I} = \frac{\int I dt}{\Delta t}$. Nach dem Induktionsgesetz ist die induzierte Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses. Für eine konstante Fläche A ergibt sich $U_{\text{ind}} = -A \cdot \frac{dB}{dt} = I \cdot R$ und daraus $I = -\frac{A}{R} \cdot \frac{dB}{dt}$

Das Verhältnis $\frac{A}{R}$ gibt genau $\frac{3}{4}$. Setzt man diesen Ausdruck für I in die Formel für den Mittelwert $\overline{I}$ ein, so erkennt man, dass sich Integral und Ableitung nach der Zeit aufheben. Deshalb ergibt sich

$$\overline{I} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} -\frac{3}{4} \cdot \frac{dB}{dt} dt}{\Delta t} = \frac{\left[-\frac{3}{4}B\right]_{t_1}^{t_2}}{t_2 - t_1}$$

Für die vorgegebenen Zeitintervalle ergeben sich die 3 Lösungen:

1. $\overline{I} = 0{,}05A$
2. $\overline{I} = -0{,}15A$
3. $\overline{I} = 0{,}03A$

Frage 7

Die Teilchengeschwindigkeit u im Laborsystem ist $u = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 1{,}25 \cdot 10^8 m/s = 0{,}417c$
Die Teilchengeschwindigkeit im Raketensystem ist $u' = \dfrac{u - v}{1 - uv/c^2} = -0{,}575c$, also in negativer Richtung der x-Achse.

Im Laborsystem finden zwei Ereignisse statt: Zur Zeit $t'_1 = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $x'_1 = 0$. Zur Zeit $t'_2 = 2ns$ befindet sich das Teilchen am Ort $x'_2 = 0{,}25m$. Diese Werte müssen mit der Lorentztransformation umgerechnet werden, wobei sich für den Raumfahrer das Laborsystem mit $v = -0{,}8c$ bewegt.
Die Zeiten im Raketensystem sind $t = \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow t_1 = 0; t_2 \approx 2{,}2ns \Rightarrow \Delta t \approx 2{,}2ns$
Die x-Koordinaten werden folgendermaßen umgerechnet:
$x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -0{,}38m \Rightarrow \Delta x = |x_2 - x_1| = 0{,}38m$
Dadurch ergibt sich auch die richtige Teilchengeschwindigkeit im Raketensystem.

Frage 8

Das Proton vollführt eine schraubenförmige Flugbahn, weil seine Geschwindigkeit eine senkrechte und eine parallele Komponente zum Magnetfeld $\vec{B}$ hat. Die senkrechte Komponente v_s ist verantwortlich für die Kreisbahn, die parallele Komponente v_p für die Vorwärtsbewegung. Durch Gleichsetzen von Lorentz- und Zentripetalkraft erhält man v_s:

$\dfrac{m \cdot v_s^2}{r} = e \cdot v_s \cdot B$ umgeformt:
$v_s = \dfrac{e \cdot B \cdot r}{m} \approx 1 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$
v_p ergibt sich aus der Ganghöhe $v_p = \dfrac{\Delta x}{T}$ mit der Umlaufzeit $T = \dfrac{2\pi r}{v_s} \approx 6{,}56 \cdot 10^{-5}s$, eingesetzt schließlich $v_p = 5{,}8 \cdot 10^3 \dfrac{m}{s}$.
Der Betrag der Gesamtgeschwindigkeit ist $\sqrt{v_s^2 + v_p^2} \approx 1{,}16 \cdot 10^4 \dfrac{m}{s}$.
Der Winkel α zwischen Geschwindigkeit und Magnetfeld lässt sich mit $\tan(\alpha) = \dfrac{v_s}{v_p} = \dfrac{2\pi r}{\Delta x}$ zu $\alpha \approx 60°$ berechnen.