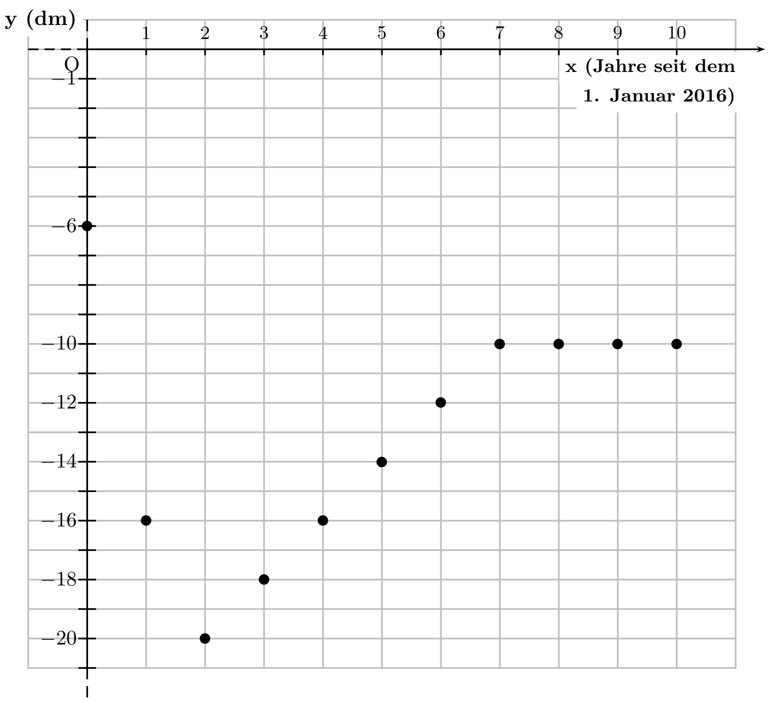
Arbeit aus Mathematik

Maturathema 2026

Lösung 2026 1. Session Problemstellung 1



1. Im ersten Abschnitt gilt: $y = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20$.
   Für $x = 2$ werden alle Terme mit $(x-2)$ null und $y = -20$ bleibt, was exakt dem Wert von 2018 entspricht: Die Wahl der Konstante -20 ist daher konsistent mit der Tabelle.

   $x = 0$:
   $$16a - 8b + 4c - 20 = -6 \implies 16a - 8b + 4c = 14$$
   $x = 1$:
   $$a - b + c - 20 = -16 \implies a - b + c = 4$$
   $x = 3$:
   $$a + b + c - 20 = -18 \implies a + b + c = 2$$

   Subtrahiert man die vorletze von der letzen Gleichung, so erhält man $2b = -2 \implies b = -1$.
   $a + c = 3; 16a + 4c = 6 \Rightarrow 16a - 4a + 12 = 6 \Rightarrow a = -0{,}5$; $c = 3{,}5$

   Im zweiten Abschnitt gilt: $y = mx - 24 + \sin^2(\pi x)$.
   Für ganzzahlige x gilt $\sin^2(\pi x) = 0$. Setzt man den Punkt für das Jahr 2019 ein $(x = 3, y = -18)$, so erhält man:
   $$3m - 24 = -18 \implies m = 2.$$

Überprüfung der anderen ganzzahligen Werte: $x = 4 \to -16$, $x = 5 \to -14$, $x = 6 \to -12$, $x = 7 \to -10$, alle konsistent. Folglich ist $m = 2$.

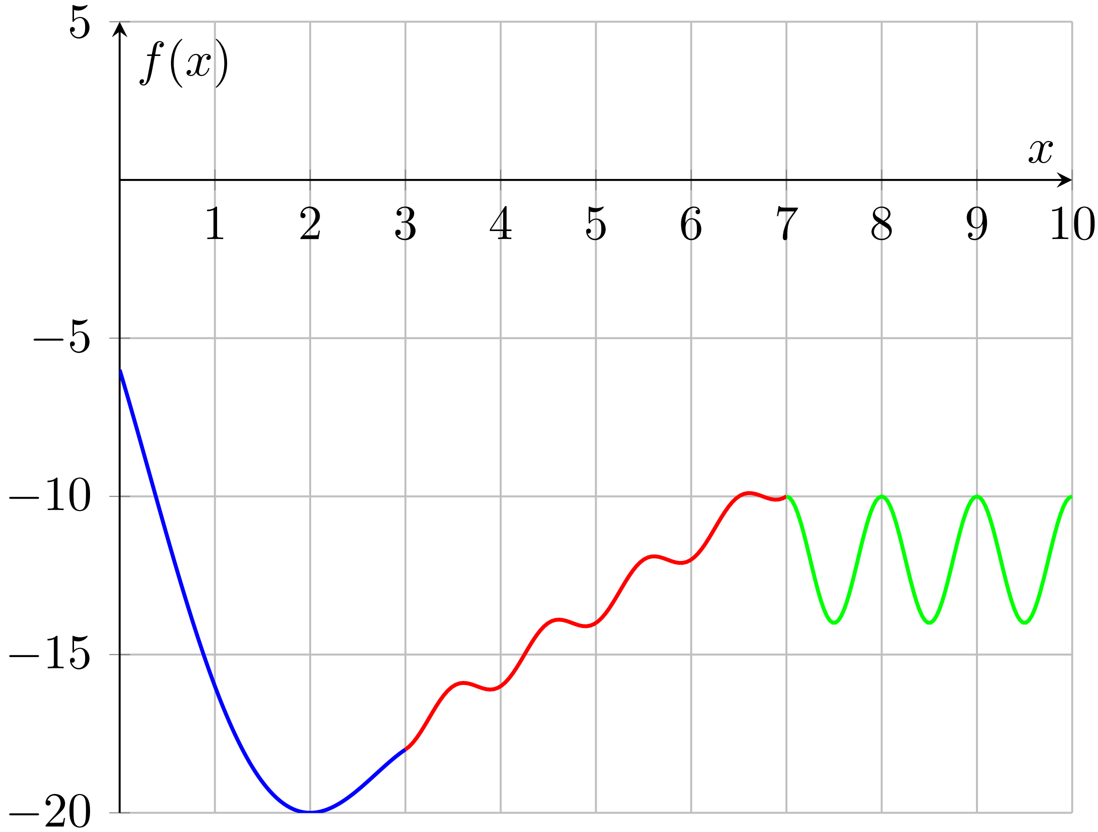
Für den dritten Abschnitt gilt: $y = 2\cos(2\pi x) + k$.
Für ganzzahlige x gilt $\cos(2\pi x) = 1$, folglich ist $y = 2 + k$. Setzt man den Wert $y = -10$ ein (2023 bis 2026):

$$2 + k = -10 \implies k = -12.$$

Das Modell lautet daher:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5(x-2)^4 - (x-2)^3 + 3{,}5(x-2)^2 - 20, & 0 \le x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x), & 3 \le x \le 7 \\ 2\cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \le 10 \end{cases}$$

in voller Übereinstimmung mit dem im Text angegebenen Ausdruck.



2. Nachdem die Stetigkeit für die Bestimmung der Koeffizienten verwendet wurde, muss diese natürlich an den beiden Nahtstellen gegeben sein:
Alle drei Funktionenteile sind in ihrem Definitionsbereich stetig.
Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ ist $f(3) = -18$, der Grenzwert $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -0{,}5(x-2)^4 - (x-2)^3 + 3{,}5(x-2)^2 - 20 = -18$. Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 3$ stetig.
Der Funktionswert an der Stelle $x = 7$ ist $f(7) = -10$, der Grenzwert $\lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+} 2\cos(2\pi x) - 12 = -10$. Daher ist die Funktion an der Stelle $x = 7$ stetig.
Damit ist die Funktion im ganzen Definitionsbereich stetig.

Erste Ableitung:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) & \text{wenn } 0 \leq x < 3 \\ 2 + 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) \cdot \pi & \text{wenn } 3 < x < 7 \\ -2\sin(2\pi x) \cdot 2\pi & \text{wenn } 7 < x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) & \text{wenn } 0 \leq x < 3 \\ 2 + \pi\sin(2\pi x) & \text{wenn } 3 < x < 7 \\ -4\pi\sin(2\pi x) & \text{wenn } 7 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Wir stellen fest, dass die einzigen Stellen einer Nicht-Differenzierbarkeit bei $x = 3$ und $x = 7$ auftreten könnten.

Wir überprüfen, ob $f'(x)$ bei $x = 3$ den gleichen Grenzwert hat:

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -2 - 3 + 7 = 2;$$

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = 2 + \pi\sin(6\pi) = 2.$$

Folglich ist $f(x)$ bei $x = 3$ differenzierbar, mit $f'(3) = 2$ (stetig ergänzt).

$x = 7$:

$$\lim_{x\to 7^-} f'(x) = 2 + \pi\sin(14\pi) = 2;$$

$$\lim_{x\to 7^+} f'(x) = -4\pi\sin(14\pi) = 0.$$

Die Ableitung lässt sich nicht stetig ergänzen, daher weist $f(x)$ einen Knickpunkt bei $x = 7$ auf.
Für die lokalen Extrema setzt man die erste Ableitung an den differenzierbaren Stellen gleich 0:

$f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) \quad \text{wenn } 0 \leq x < 3 \Rightarrow (x-2)(-2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7) =$
$(x-2)(-2x^2 + 5x + 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_{2/3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{65}}{4}$
Die beiden letzten Lösungen sind nicht im Definitionsbereich, nur $x = 2$ ist möglich.
Zweite Ableitung: $f''(x) = -6(x-2) - 6(x-2)^2 + 7$; $f''(2) > 0$ Daher handelt es sich um ein relatives Minimum. Der Tiefpunkt lautet $T(2; -20)$
Bei $x = 3$ ist die Ableitung ungleich 0, also liegt an der differenzierbaren Stelle kein Extremum vor.
Zweiter Abschnitt: $f'(x) = 2 + \pi\sin(2\pi x) \quad \text{wenn } 3 < x < 7$
$2 + \pi\sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow \sin(2\pi x) = -\dfrac{2}{\pi}$
Der Taschenrechner liefert im vorgegebenen Intervall 8 Lösungen : $x = 3{,}61; 3{,}89; 4{,}61; 4{,}89; 5{,}61; 5{,}89; 6{,}61; 6{,}89$
Die zugehörigen y-Werte sind $y = -15{,}89; -16{,}11; -13{,}89; -14{,}11; -11{,}89; -12{,}11; -9{,}89; -10{,}11$
Bei $x = 7$ liegt ein Knickpunkt vor, die linksseitige Ableitung ist positiv, der Wert der Ableitung rechts von 7 entwickelt sich von 0 in den negativen Bereich, also fällt die Funktion und es liegt ein relatives Maximum vor, der Hochpunkt ist $H(7; -10)$.
Dritter Abschnitt: $f'(x) = -4\pi\sin(2\pi x) \quad \text{wenn } 7 < x \leq 10$
$-4\pi\sin(2\pi x) = 0 \Rightarrow x_1 = 8; x_2 = 9; x_3 = 10$
Die Extrempunkte sind $(8; -10); (9; -10); (10; -10)$

3. Eine Voraussetzung für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist die Differenzierbarkeit im offenen Intervall $]0; 10[$
   Es wurde aber gezeigt, dass die Funktion bei $x = 7$ nicht ableitbar ist.
   Trotzdem können Stellen existieren, in denen die Ableitung gleich der Steigung der Geraden durch die Begrenzungspunkte ist:

$$\frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{-10 + 6}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Zwischen $x = 0$ und $x = 2$ steigt der Ableitungswert stetig von $f'(0) = -10$ auf $f'(2) = 0$. Somit existiert in diesem offenen Intervall laut Zwischenwertsatz sicher eine Stelle, an der $f'(x) = -\dfrac{2}{5}$ ist. Im zweiten Intervall gibt es vier Stellen, wo dies möglich ist, im dritten Intervall drei Stellen.

4. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung verlangt, dass die Funktion im abgeschlossenen Intervall stetig ist. Dies erfüllt unsere Funktion.

$$\Delta h = \frac{\int_0^{10} f(x)dx}{10} = \frac{\int_0^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx}{10}.$$

Wir berechnen die Stammfunktionen:

- $\int \left[-\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20\right] dx =$
  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^5}{5} - \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{(x-2)^3}{3} - 20x + C$

- $\int \left[2x - 24 + \sin^2(\pi x)\right] dx = x^2 - 24x + \int \frac{1-\cos(2\pi x)}{2} dx =$
  $x^2 - 24x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2\pi x)dx = x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} + C$

- $\int \left[2\cos(2\pi x) - 12\right] dx = 2\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} - 12x + C$

Folglich,

$$\Delta h = \frac{1}{10}\left\{\left[-\frac{(x-2)^5}{10} - \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{7(x-2)^3}{6} - 20x\right]_0^3 + \left[x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi}\right]_3^7 + \left[\frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - 12x\right]_7^{10}\right\} =$$

$$\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{7}{6} - 60 - \left(\frac{16}{5} - 4 - \frac{28}{3}\right) + 49 - \frac{329}{2} - \left(9 - \frac{141}{2}\right) - 120 + 84\right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{2781}{20}\right) = -\frac{2781}{200} = -13{,}905.$$

Die Integrale der Winkelfunktionen kann man umgehen, wenn man ihren Verlauf kennt.

Nimmt man an, dass der See ein gerader Zylinder mit einer Grundfläche A von 57 km^2 und einer Höhe Δh ist, dann ist der mittlere Unterschied des Wasservolumens im Vergleich zum hydrometrischen Nullniveau zwischen Anfang 2016 und Anfang 2026 gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Delta V = A \cdot \Delta h &= 57 \text{ km}^2 \cdot (-13{,}9 \text{ dm}) = \\ &= 57 \cdot (10^4 \text{ dm})^2 \cdot (-13{,}9 \text{ dm}) = \\ &= 57 \cdot 10^8 \cdot (-13{,}9) \text{ dm}^3 = \\ &= -7{,}93 \cdot 10^{10} \text{ dm}^3 \\ &= -7{,}93 \cdot 10^{10} \text{ L}.\end{aligned}$$

Diese mittlere Höhe hat aber gar nichts mit der Änderung des Wasserpegels von 2016 bis 2026 zu tun:
$\Delta H = h(2026) - h(2016) = -4dm; \Delta V = A \cdot \Delta H = -2{,}28 \cdot 10^{10}$
Somit ist auch die Abschätzung nicht sinnvoll und liefert einen völlig anderen Wert!
Es müsste nach dem durchschnittlichen Fehlvolumen gefragt werden, um mit der Abschätzung einen passablen Wert zu bekommen. Dies steht aber weder im Originaltext noch in der Übersetzung.

Lösung 2026 1. Session Problemstellung 2

1. $$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \quad \text{mit } a \neq 0,$$

   Der Definitionsbereich der Funktion ist $x \neq 1$.
   Untersuchung der Monotonie mithilfe der ersten Ableitung:
   Für $x \neq 1$ ergibt sich:

   $$f_a'(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}.$$

   Der Nenner ist überall dort positiv, wo die Funktion definiert ist, daher wird das Vorzeichen der ersten Ableitung nur durch den Zähler bestimmt:

   $$f_a'(x) > 0 \to ax(x-2) > 0.$$

   Wenn $a > 0$, ergibt sich:
   $$f_a'(x) > 0 \to x(x-2) > 0 \to x < 0 \vee x > 2.$$
   Dies sind die Punkte mit der Abszisse $x = 0$ oder $x = 2$.

   Es muss daher gelten:

   - für $x = 0$, $f_a(0) = y = k \to \frac{0}{-1} = k \to k = 0$;

   - für $x = 2$, $f_a(2) = y = k \to \frac{4a}{1} = k \to k = 4a$.

   Die Gerade mit der Gleichung $y = k$ muss auch tangential zum Graphen γ der Funktion sein:

   $$g(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & \text{wenn } x \geqq 0 \\ -\frac{x}{x^2+1} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

   Wir suchen also die Extremstellen von g. Berechnen wir die erste Ableitung:

   $$g'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x > 0 \\ \frac{-x^2-1-(-x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \to g'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x > 0 \\ \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

   Differenzierbarkeit in $x = 0$:

   - $g_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 1$;

   - $g_-'(0) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = -1$.

   Die rechts- und linksseitige Ableitung sind verschieden und endlich, daher ist $x = 0$ ein Eckpunkt und die Gerade mit der Gleichung $y = k$ kann in $x = 0$ nicht tangential zu γ sein.

   Bestimmen wir die Extremstellen von g im differenzierbaren Bereich.

   - Für $x > 0$:

   $$g'(x) = 0 \to \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \to -x^2+1 = 0 \to x = \pm 1 \to x > 0 \to x = 1 \to g(1) = \frac{1}{2}.$$

   Die Gerade mit der Gleichung $y = k$ ist tangential zu γ in $x = 1$, wenn $k = \frac{1}{2}$ ist.

- Für $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x < 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow g(-1) = \frac{1}{2}.$$

Die Gerade mit der Gleichung $y = k$ ist tangential zu γ in $x = -1$, wenn $k = \frac{1}{2}$ ist.

Die einzige Gerade mit der Gleichung $y = k$, die sowohl zu φ_a als auch zu γ tangential ist, erhält man für:

$$\begin{cases} k = 4a \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 4a \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Wir schließen den Fall $k = 0$ aus, da die horizontale Gerade zwar tangential zu φ_a, aber nicht zu γ wäre.

Die gesuchten Werte sind folglich $a = \frac{1}{8}$ und $k = \frac{1}{2}$.

2. Wir betrachten die Extrempunkte A von φ_a mit $x_A \neq 0$ und B von γ mit $x_B > 0$. Durch die im vorherigen Berechnungen ist bekannt, dass $A(2; 4a)$ und $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$ gilt. Die Länge der Strecke AB hängt vom Parameter a ab und ist durch folgende Funktion gegeben:

$$h(a) = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (1-8a)^2}.$$

Die Funktion $h(a)$ ist für $a \neq 0$ definiert (siehe Angabe), stets positiv und in ihrem Definitionsbereich stetig.
Das Minimum erhält man, wenn das Quadrat $(1-8a)^2$ gleich 0 ist, also für $1 = 8a \Rightarrow a = \dfrac{1}{8}$

3. Kurvendiskussion:
$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1}$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0.$$

Der Graph φ schneidet die x-Achse, und somit auch die y-Achse, im Ursprung $(0; 0)$.

Vorzeichen der Funktion:

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} > 0 \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow x > 1.$$

Daher sind die Funktionswerte für $x > 1$ positiv.

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{x-1}\right) = +\infty.$$

Die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ ist eine vertikale Asymptote für die Funktion (sowohl von links als auch von rechts).

Schiefe Asymptote (Polynomdivision):
$\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$
Die schiefe Asymptote ist daher $y = x + 1$
Die ersten Ableitung wurde bereits zum bereits allgemein im ersten Teil durchgeführt; a wird durch den Wert $\frac{1}{8}$ ersetzen:

$$f'(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Die Funktion ist streng monoton steigend in $]-\infty;0[$ und in $]2;+\infty[$, sie ist streng monoton fallend in $]0;1[$ und in $]1;2[$; $x = 0$ ist ein lokaler Hochpunkt (mit der Ordinate 0), $x = 2$ ist ein lokaler Tiefpunkt (mit der Ordinate $\frac{1}{2}$).

Der Definitionsbereich der ersten Ableitung ist $\mathbb{R} - \{1\}$, die Funktion $f(x)$ ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig. Das Krümmungsverhalten wird mit Hilfe der zweiten Ableitung untersucht:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{8}\cdot\frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{4(x-1)^3}; \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \to \frac{1}{4(x-1)^3} > 0 \to x - 1 > 0 \to x > 1.$$

Daher ist die Funktion f im Intervall $]1;+\infty[$ linksgekrümmt und im Intervall $]-\infty;1[$ rechtsgekrümmt. Da $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehört, gibt es keine Wendepunkte.

Untersuchung der Funktion g (teilweise bereits in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführt):

$$g(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{x}{x^2+1} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{für } x > 0 \\ \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{R}$, der Definitionsbereich von g' ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$ und gerade, denn:

$$g(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2+1} = \frac{|x|}{x^2+1} = g(x),$$

daher ist ihr Graph symmetrisch zur y-Achse; wir müssen also die Funktion nur für $x \geq 0$ untersuchen und die Ergebnisse auf $x < 0$ übertragen.

Schnittstellen mit der x-Achse (Nullstellen):

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = 0 \end{cases} \to g(x) = 0 \to \frac{|x|}{x^2+1} = 0 \to x = 0.$$

Der Graph γ schneidet somit die x-Achse, und folglich auch die y-Achse, im Ursprung $(0;0)$.

Vorzeichen der Funktion (für $x \geq 0$):

$$g(x) > 0 \to \frac{x}{x^2+1} > 0 \to x > 0.$$

Die Funktion g ist positiv für $x > 0$ und aus Symmetriegründen auch für $x < 0$; sie ist also in ganz $\mathbb{R}$ positiv, außer bei $x = 0$, wo sie null wird.

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$

und, aus Symmetriegründen, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Die Gerade mit der Gleichung $y = 0$, also die Abszissenachse, ist sowohl die linke als auch die rechte horizontale Asymptote.

Wir untersuchen die erste Ableitung. Wir haben bereits gesehen, dass die erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht existiert, wo die Funktion einen Knickpunkt aufweist. Für $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2};$$

$$g'(x) > 0 \to \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} > 0 \to 1 - x^2 > 0 \to x > 0 \to 0 < x < 1.$$

Aufgrund der Symmetrie der Funktion gilt für $x < 0$, dass $g'(x) > 0$ für $x < -1$ ist.

Monotonieverhalten:
Die Funktion g ist streng monoton steigend in $]-\infty;-1[\,\cup\,]0;1[$
und streng monoton fallend in $]-1;0[\,\cup\,]1;+\infty[$.

Die Extrema haben die Koordinaten $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $(0;0)$ und $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

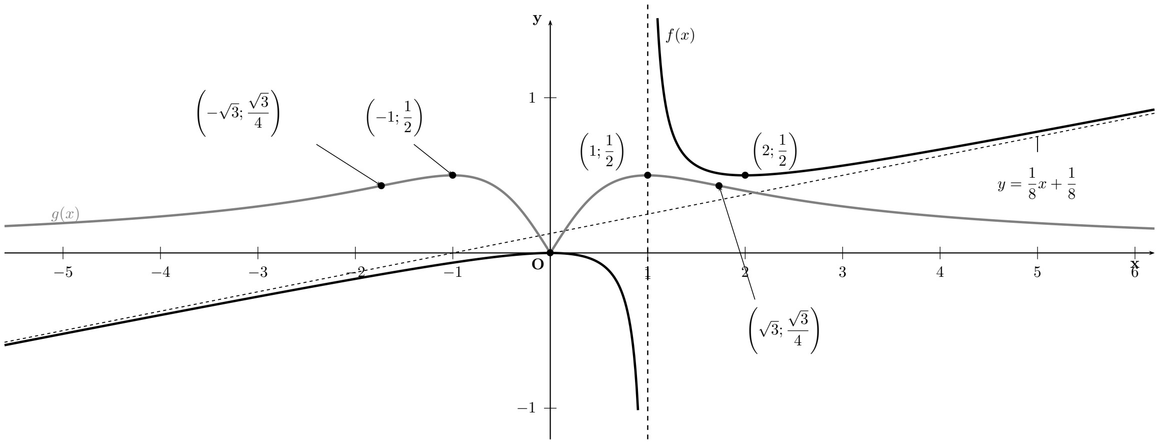
Wendestellen und Krümmungsverhalten Wir untersuchen die zweite Ableitung. Für $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(-2x^3-2x+4x^3-4x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}; \end{aligned}$$

$$g''(x) > 0 \to \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \to 2x(x^2-3) > 0.$$

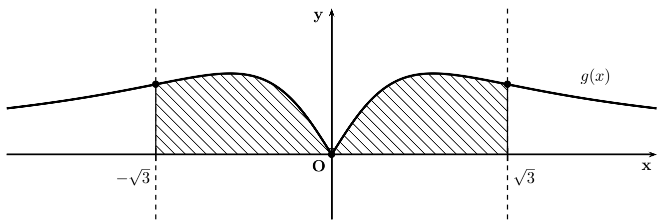
Der Ausdruck wird in Faktoren zerlegt. Zunächst untersuchen wir das Verhalten für $x > 0$:
$x^2 - 3 > 0$ für $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$ gilt.

Die Funktion g ist linksgekrümmt in $]\sqrt{3};+\infty[$ und rechtsgekrümmt in $]0;\sqrt{3}[$; sie weist einen Wendepunkt mit den Koordinaten $\left(\sqrt{3};g(-\sqrt{3})\right) = \left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ auf. Aufgrund der Symmetrie ist die Funktion g auch in $]-\infty;-\sqrt{3}[$ linksgekrümmt und in $]-\sqrt{3};0[$ rechtsgekrümmt; sie weist einen Wendepunkt mit den Koordinaten $\left(-\sqrt{3};g(\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ auf.



Mit Hilfe des Graphen sieht man, dass die Lösung der Ungleichung $f(x) > g(x)$, gegeben durch die Intervalle, in denen der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt, $x > 1$ ist.

4. Wir müssen den Flächeninhalt der Region berechnen, die unter dem Graphen von g liegt und zwischen den Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$ eingeschlossen ist, welche den Abszissen der Wendepunkte von g entsprechen.

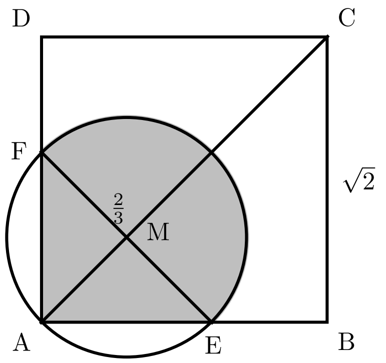


Die Region ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, daher berechnen wir den Flächeninhalt im Intervall $[0; \sqrt{3}]$ und multiplizieren mit 2.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \ln\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right] - \ln\left(0^2+1\right)$$
$$= \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 \approx 1{,}386$$

wobei wir das Integral mithilfe der allgemeinen Formel $\int \frac{z'(x)}{z(x)}\,dx = \ln|z(x)|$ (Substitution $z := x^2+1$ und Rücksubstitution) gelöst haben.

Lösung 2026 1. Session Frage 1



Das Quadrat $ABCD$ hat Seitenlänge $\ell = \sqrt{2}$ dm, also die Fläche $A_{\text{quad}} = \ell^2 = (\sqrt{2}\text{dm})^2 = 2\text{ dm}^2$

Die überdeckte Fläche setzt sich aus einem Halbkreis und einem rechtwinkligen Dreieck mit Grundlinie und Höhe $\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}$dm und Fläche $\frac{4}{9}$dm^2.

Somit ist die schraffierte Fläche gleich $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \pi \text{dm}^2 + \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot \pi + 4}{9}\text{dm}^2 \approx 1{,}143\text{dm}^2$

Somit ist bereits mehr als die Hälfte der Quadratfläche bedeckt, wie Cecilia behauptet. Sie hat Recht.

Lösung 2026 1. Session Frage 2

Zunächst werden die Abstände der Punkte bestimmt:

$$d(P;Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-4-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\\
d(A,C) &= \overline{AC} = \sqrt{(2+6)^2 + (-4-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{64+25+9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\\
d(A,D) &= \overline{AD} = \sqrt{(2+1)^2 + (-4-4)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{9+64+25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\\
d(B,C) &= \overline{BC} = \sqrt{(3+6)^2 + (5-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{81+16+1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\\
d(B,D) &= \overline{BD} = \sqrt{(3+1)^2 + (5-4)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{16+1+81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\\
d(C,D) &= \overline{CD} = \sqrt{(-6+1)^2 + (1-4)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Somit haben alle Punkte voneinander den gleichen Abstand und es handelt sich um ein Tetraeder.
Der Kugelmittelpunkt ist der Symmetriepunkt des Tetraeders. Dieser befindet sich sicherlich auf der Raumhöhe, die den Schwerpunkt S des Dreiecks BCD mit dem Punkt A verbindet.
Die Raumkoordinaten des Schwerpunktes im Dreiecks BCD sind $S\left(\frac{3+(-6)+(-1)}{3}; \frac{5+1+4}{3}; \frac{-1+0+8}{3}\right) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Der Vektor $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 2+\frac{4}{3} \\ -4-\frac{10}{3} \\ 3-\frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{-22}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor steht normal zur Tangentialebene der Kugel in A.
Die Tangentialebene erfüllt die Gleichung $5x - 11y + z + d = 0$ und enthält den Punkt A.
Daher gilt $5 \cdot 2 - 11 \cdot (-4) + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -57$
Die Tangentialebene lautet daher $5x + 11y + 2z - 57 = 0$
Bemerkung: Für die nicht gesuchten Koordinaten des Tetraederzentrums bildet man jeweils die Summe der einer Raumkoordinate und dividiert diese Summe durch 4.

Lösung 2026 1. Session Frage 3

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^M \Rightarrow A = A_0 \cdot 10^M.$$

Daher gilt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \cdot 10^{M_1}}{A_0 \cdot 10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2}.$$

Mit den gegebenen Werten $M_1 = 6{,}5$ e $M_2 = 6{,}0$ erhält man

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^{6{,}5-6{,}0} = 10^{0{,}5} = \sqrt{10} \approx 3{,}16.$$

Das Verhältnis der Amplituden ist daher $A_1/A_2 = \sqrt{(10)} \approx 3{,}16$.

Aus dem Gutenberg-Richter-Gesetz folgt mit der Definition des Logarithmus:

$$\log_{10}\frac{E}{E_0} = 1{,}5M + 4{,}8 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{1{,}5M+4{,}8} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{1{,}5M+4{,}8}.$$

Das Verhältnis zwischen den freigesetzten Energien ist daher:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{1{,}5M_1+4{,}8}}{E_0 \cdot 10^{1{,}5M_2+4{,}8}} = 10^{1{,}5(M_1-M_2)}.$$

Durch Einsetzen:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{1{,}5\cdot(6{,}5-6{,}0)} = 10^{1{,}5\cdot 0{,}5} = 10^{0{,}75} \approx 5{,}62$$

Das erste Erdbeben hat folglich eine Energie E_1 freigesetzt, die ca. 5,62 Mal größer war als die Energie E_2 des zweiten Bebens.
Die prozentuale Veränderung der Energie beim Übergang vom ersten zum zweiten Ereignis ist:

$$\frac{\Delta E}{E_1} \cdot 100\% = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \cdot 100\% = \left(\frac{E_2}{E_1} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{1}{10^{-0{,}75}} - 1\right) \cdot 100\% = \left(10^{-0{,}75} - 1\right) \cdot 100\% \approx -82{,}2\%$$

Natürlich kann auch die prozentuale Veränderung der Energie in Bezug auf das zweite Ereignis berechnet werden:

$$\frac{\Delta E}{E_2} \cdot 100\% = \frac{E_2 - E_1}{E_2} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{10^{0{,}75}}\right) \cdot 100\% = \approx -462\%$$

Lösung 2026 1. Session Frage 4

Die Funktion $F(x)$ kann explizit berechnet werden, indem man sich an die Ableitung des Arkustangens erinnert. Es gilt

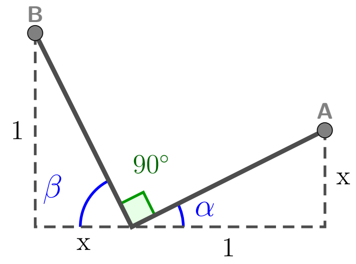
$$F(x) = \arctan(x) - \arctan(0) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(0) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Durch Ableiten erhält man

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Daher ist F konstant für $x > 0$. Im Besonderen genügt es, die Funktion F an einer beliebigen Stelle zu berechnen, um ihren Wert zu erhalten, zum Beispiel $F(1) = 2\arctan(1) = \pi/2$.

Das Ergebnis lässt sich grafisch interpretieren.



Die beiden Winkel ergeben immer 90°.

Lösung 2026 1. Session Frage 5

Eine vertikale Asymptote des Logarithmus entsteht dort, wo das Argument gegen 0^+ strebt (da $\lim_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$).
Daher muss für $x = \pm\sqrt{3}$ gelten: $x^2 + k = 0$. Dies bestimmt k.
Das Argument $x^2 + k$ wird null und strebt von gegen 0^+ bei $x = \pm\sqrt{3}$.

$$(\pm\sqrt{3})^2 + k = 0 \implies 3 + k = 0 \implies k = -3.$$

Die Funktion wird zu

$$y = 5h \ln(x^2 - 3),$$

mit dem Definitionsbereich $x^2 - 3 > 0$, also $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$.

Bestimmung der Punkte A und B:
Wir setzen $y = 0$:

$$5h \ln(x^2 - 3) = 0 \implies \ln(x^2 - 3) = 0 \implies x^2 - 3 = 1 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Beide gehören zum Definitionsbereich ($|\pm 2| > \sqrt{3}$). Daher gilt:

$$A(-2; 0), \quad B(2; 0).$$

Berechnung der Ableitung und der Tangenten.

$$y' = 5h \cdot \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{10hx}{x^2 - 3}.$$

Steigung in $B(2; 0)$:

$$m_B = \frac{10h \cdot 2}{2^2 - 3} = \frac{20h}{1} = 20h.$$

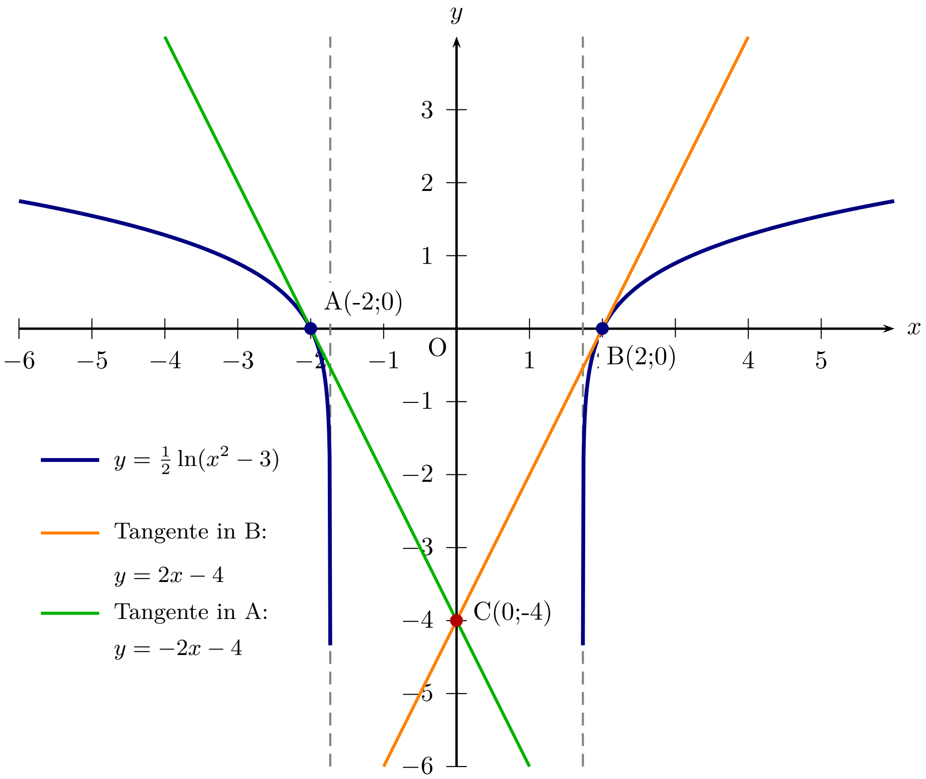
Gleichung der Tangente in B:

$$y - 0 = 20h(x - 2) \implies y = 20h(x - 2).$$

$C(0; -4)$ liegt auf der Tangente:

$$-4 = 20h \cdot (0 - 2) \implies -4 = -40h \implies h = \frac{1}{10}.$$

Da $h = \frac{1}{10} \neq 0$ ist, ist die Bedingung $h \neq 0$ erfüllt.
Daher gilt: $k = 3; \quad h = \frac{1}{10}$



Lösung 2026 1. Session Frage 6

$f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$. Für die schiefe Asymptote $y = 3x - 2$ schreiben wir $p(x) = (2x+1)(3x-2) + R$, wobei R der konstante Rest ist.
Durch Ausmultiplizieren erhält man: $(2x + 1)(3x - 2) = 6x^2 - 4x + 3x - 2 = 6x^2 - x - 2$. Daher gilt $p(x) = 6x^2 - x - 2 + R$.

Außerdem gilt $f(1) = 0$, weil die Koordinaten von $P(1; 0)$ die Funktionsgleichung erfüllen:
$f(1) = \frac{p(1)}{3} = 0 \rightarrow p(1) = 0$.

$p(1) = 6 - 1 - 2 + R = 3 + R = 0 \rightarrow R = -3$.

Folglich ist $\mathbf{p(x) = 6x^2 - x - 5}$.

Überprüfung: $f(1) = \frac{6-1-5}{2+1} = \frac{0}{3} = 0$ ✓. Asymptote: Wenn man $6x^2 - x - 5$ durch $2x + 1$ dividiert, erhalten wir den Quotienten $3x - 2$ und den Rest $-\frac{3}{2x+1} \rightarrow$ für $x \rightarrow \infty$ strebt der Rest gegen 0.

Lösung 2026 1. Session Frage 7

Man stellt zunächst fest, dass man zur Beantwortung der Fragen nicht notwendigerweise wissen muss, in welcher Reihenfolge die Karten unter den Spielern verteilt werden, d. h. ob zuerst 10 an Giuseppe und dann jeweils 10 an die anderen der Reihe nach ausgegeben werden, oder ob eine Karte pro Kopf im Rotationsverfahren bis zum Aufbrauchen des Stapels verteilt wird, oder auf eine andere Art und Weise.
Es ist so, als ob die bereits den anderen Spielern zugewiesenen Karten noch im Stapel wären, da wir keine Informationen darüber haben, welche es sind.

Es seien C_1, C_2, C_3 die Ereignisse „die 1. / 2. / 3. Karte ist von der Farbe Kelche“. Zu Beginn befinden sich 10 Kelche unter den 40 Karten; mit jedem erfolgreichen Zug verringern sich sowohl die Kelche als auch die

Gesamtzahl der Karten um 1. Nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2 \mid C_1) \cdot P(C_3 \mid C_1 \cap C_2).$$

Einsetzen der Werte liefert:

$$P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{720}{59280} = \frac{3}{247} \simeq 1{,}21\%$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Anzahl der günstigen Fälle (wie viele Dreiergruppen gibt es von den 10 Kelche-Karten) durch die Anzahl der möglichen Dreiergruppen dividieren:

$$fP = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{3}{247} \simeq 1{,}21\%$$

Um analog dazu die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass sich unter den 10 Karten von Lorenzo die Asse von Stäben (*bastoni*), Schwertern (*spade*) und Münzen (*denari*) befinden, zählen wir, wie viele Möglichkeiten es gibt, die anderen 7 Karten auszuwählen, und teilen durch die Anzahl der gesamten Möglichkeiten:

$$\frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}} = \frac{37!}{7!30!} \cdot \frac{10!30!}{40!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247} \simeq 1{,}21\%.$$

Beide Fragestellungen führen zum selben Wert $\frac{3}{247}$. Dies ist kein Zufall: In beiden Fällen wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass 3 bestimmte Karten (in a) drei Kelche in festgelegten Positionen, in b) drei präzise Asse) in eine Hand von 10 aus 40 Karten fallen, und diese Wahrscheinlichkeit hängt nicht von der Reihenfolge des Ziehens ab. Die Übereinstimmung bestätigt die Kohärenz der beiden Methoden (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik), die dasselbe Zufallsphänomen aus zwei äquivalenten Blickwinkeln beschreiben.

Lösung 2026 1. Session Frage 8

Die Anzahl der möglichen Zusammensetzungen der Gruppen entspricht dem Produkt aus der Anzahl der Möglichkeiten, die Teams jeder Gruppe (Topf) in die Gruppen (A, B, C, D) einzuteilen, oder, mit anderen Worten, der Anzahl der Möglichkeiten, jedem Team eine Gruppe zuzuordnen.

Wir wissen, dass die Teams des ersten Topfes entsprechend ihrer Ranking-Reihenfolge in die Gruppen eingeteilt werden: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D.
Wir stellen fest, dass die vorgegebene Zuweisung der Teams des ersten Topfes die Gruppen voneinander unterscheidbar macht, was die Berechnung der Möglichkeiten betrifft, die Teams der anderen beiden Töpfe den Gruppen zuzuweisen.

Für die Teams des zweiten Topfes (Ranking von 5 bis 8) muss die Anzahl der Permutationen der vier Buchstaben ABCD berechnet werden. Zum Beispiel entspricht CABD der folgenden Zuweisung der Gruppen: 5-C, 6-A, 7-B, 8-D. Insgesamt gibt es also $P_4 = 4! = 24$ Möglichkeiten, die Teams des zweiten Topfes den Gruppen zuzuweisen.

Für die Teams des dritten Topfes ist die Argumentation analog zu der der Teams des zweiten Topfes, aber in diesem Fall handelt es sich um die Permutationen von AABBCCDD, d. h. die Permutationen von 8 Elementen, von denen vier jeweils zweimal wiederholt werden. Es gibt daher $P_{8,2} = \frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$ Möglichkeiten, die Teams des dritten Topfes den Gruppen zuzuweisen.
Daher beträgt die Anzahl der möglichen Zusammensetzungen der vier Gruppen insgesamt $24 \cdot 2520 = 60\,480$.

Alternativ hätten wir für die Teams des dritten Topfes feststellen können, dass die Möglichkeiten, zwei Teams aus insgesamt 8 auszuwählen, um sie der ersten Gruppe zuzuweisen, durch $C_{8,2}$ gegeben sind. Nacheinander

sind die Möglichkeiten, zwei Teams aus den verbleibenden 6 auszuwählen, um sie der zweiten Gruppe zuzuweisen, durch $C_{6,2}$ gegeben; für die dritte Gruppe sind die Möglichkeiten $C_{4,2}$. Für die vierte Gruppe ist die Wahl zwingend vorgegeben, da nur noch zwei Teams einzuteilen sind.
Die möglichen Zusammensetzungen der vier Gruppen sind also insgesamt:

$$24 \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} = 24 \cdot \frac{8!}{6!\,2!} \cdot \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 60\,480.$$