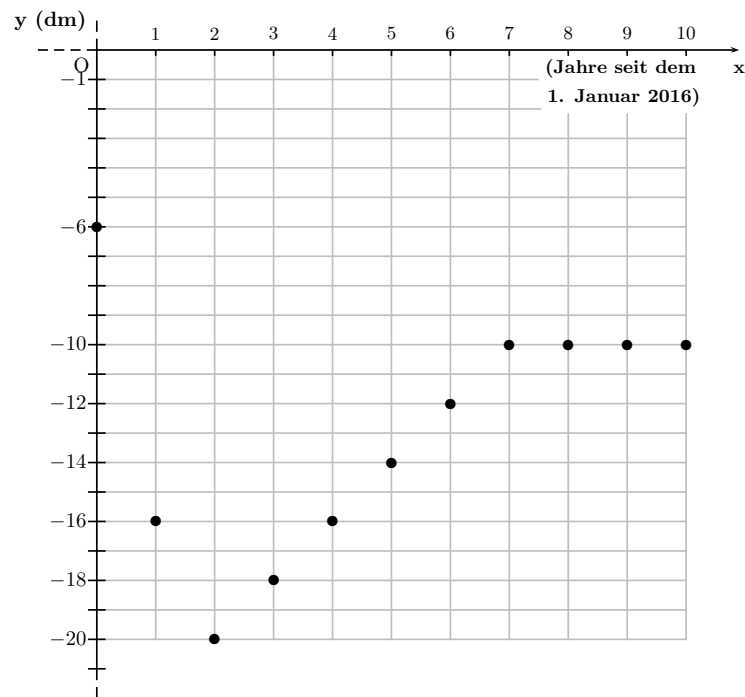


# Lösung: Arbeit aus Mathematik

Maturathema 2026

## Lösung 2026 1. Session Problemstellung 1



Vorüberlegung: Bei der abschnittswise Modellierung des Wasserstandes wird berücksichtigt, dass keine abrupten Höhenänderungen auftreten können. Daher wird die Stetigkeit der Funktion an den Anschlussstellen vorausgesetzt.

1. Im ersten Abschnitt gilt:  $y = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 - 20$ .

Für  $x = 2$  werden alle Terme mit  $(x - 2)$  null und  $y = -20$  bleibt, was exakt dem Funktionswert von 2018 entspricht: Die Wahl der Konstante  $-20$  ist daher konsistent mit der Tabelle.

$$x = 0:$$

$$16a - 8b + 4c - 20 = -6 \implies 16a - 8b + 4c = 14$$

$$x = 1:$$

$$a - b + c - 20 = -16 \implies a - b + c = 4$$

$$x = 3:$$

$$a + b + c - 20 = -18 \implies a + b + c = 2$$

Subtrahiert man die vorletzte von der letzten Gleichung, so erhält man  $2b = -2 \implies b = -1$ .

$$a + c = 3; 16a + 4c = 6 \implies 16a - 4a + 12 = 6 \implies a = -0,5; c = 3,5$$

Im zweiten Abschnitt gilt:  $y = mx - 24 + \sin^2(\pi x)$ .

Für ganzzahlige  $x$  gilt:  $\sin^2(\pi x) = 0$ . Setzt man den Punkt für das Jahr 2019 ein ( $x = 3, y = -18$ ), so erhält man:

$$3m - 24 = -18 \implies m = 2.$$

Überprüfung der anderen ganzzahligen Werte:  $x = 4 \rightarrow -16, x = 5 \rightarrow -14, x = 6 \rightarrow -12, x = 7 \rightarrow -10$ , alle konsistent. Folglich ist  $m = 2$ .

Für den dritten Abschnitt gilt:  $y = 2 \cos(2\pi x) + k$ .

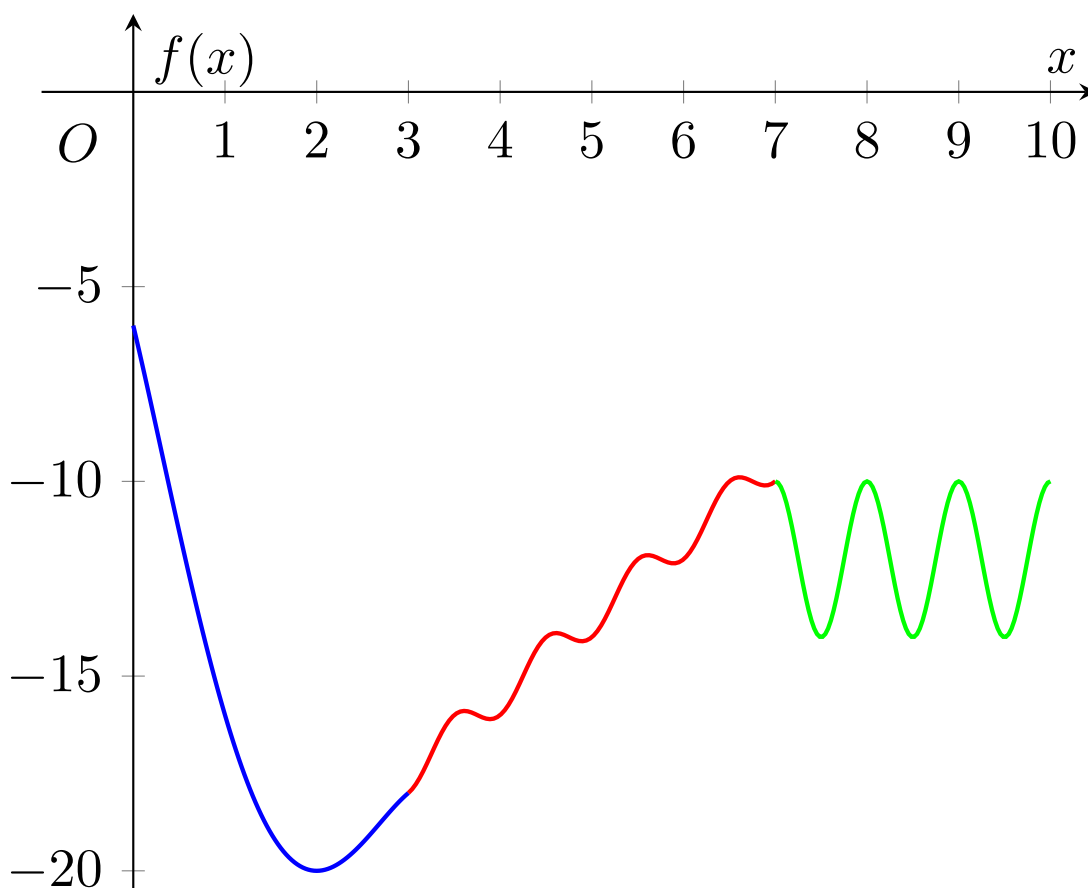
Für ganzzahlige  $x$  gilt  $\cos(2\pi x) = 1$ , folglich ist  $y = 2 + k$ . Setzt man den Wert  $y = -10$  ein (2023 bis 2026):

$$2 + k = -10 \implies k = -12.$$

Das Modell lautet daher:

$$f(x) = \begin{cases} -0,5(x-2)^4 - (x-2)^3 + 3,5(x-2)^2 - 20, & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x), & 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

in voller Übereinstimmung mit dem im Text angegebenen Ausdruck.



2. Alle drei Funktionenteile sind im Inneren ihres Definitionsbereichs stetig.

Nachdem die Stetigkeit für die Bestimmung der Koeffizienten verwendet wurde, muss diese natürlich an den beiden Nahtstellen gegeben sein:

Der Funktionswert an der Stelle  $x = 3$  ist  $f(3) = -18$ , der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} -0,5(x-2)^4 - (x-2)^3 + 3,5(x-2)^2 - 20 = -18$ . Daher ist die Funktion an der Stelle  $x = 3$  stetig.

Der Funktionswert an der Stelle  $x = 7$  ist  $f(7) = -10$ , der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} 2 \cos(2\pi x) - 12 = -10$ . Daher ist die Funktion an der Stelle  $x = 7$  stetig.

Damit ist die Funktion im ganzen Definitionsbereich stetig.

Erste Ableitung:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) & \text{wenn } 0 \leq x < 3 \\ 2 + 2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \cdot \pi & \text{wenn } 3 < x < 7 \\ -2 \sin(2\pi x) \cdot 2\pi & \text{wenn } 7 < x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) & \text{wenn } 0 \leq x < 3 \\ 2 + \pi \sin(2\pi x) & \text{wenn } 3 < x < 7 \\ -4\pi \sin(2\pi x) & \text{wenn } 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

Wir stellen fest, dass die einzigen Stellen einer Nicht-Differenzierbarkeit bei  $x = 3$  und  $x = 7$  auftreten könnten.

Wir überprüfen, ob  $f'(x)$  bei  $x = 3$  den gleichen Grenzwert hat:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -2 - 3 + 7 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 2 + \pi \sin(6\pi) = 2$$

Folglich ist  $f(x)$  bei  $x = 3$  differenzierbar, mit  $f'(3) = 2$  (stetig ergänzt).

$x = 7$ :

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f'(x) = 2 + \pi \sin(14\pi) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f'(x) = -4\pi \sin(14\pi) = 0$$

Die Ableitung lässt sich nicht stetig ergänzen, daher weist  $f(x)$  einen Knickpunkt bei  $x = 7$  auf.

## Extrema

Um die lokalen Extrema (Hoch- und Tiefpunkte) im Definitionsbereich  $[0, 10]$  zu bestimmen, untersuchen wir die drei Intervalle einzeln sowie die Übergangsstellen.

### 1. Intervall: $0 \leq x < 3$

Zur Vereinfachung der Ableitung nutzen wir die Substitution  $u = x - 2$ . Da  $0 \leq x < 3$ , gilt für die neue Variable:  $-2 \leq u < 1$ .

Die Funktion lautet transformiert:

$$f(u) = -\frac{1}{2}u^4 - u^3 + \frac{7}{2}u^2 - 20$$

Die erste Ableitung nach  $u$  ist:

$$f'(u) = -2u^3 - 3u^2 + 7u = -u(2u^2 + 3u - 7)$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null ( $f'(u) = 0$ ):

(a)  $u_0 = 0 \implies x_1 = 2$

(b)  $2u^2 + 3u - 7 = 0 \implies u_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$

•  $u_1 = \frac{-3 + \sqrt{65}}{4} \approx 1,27$  (liegt außerhalb des Intervalls, da  $u < 1$ )

•  $u_2 = \frac{-3 - \sqrt{65}}{4} \approx -2,77$  (liegt außerhalb des Intervalls, da  $u \geq -2$ )

Es verbleibt also nur die Extremstelle bei  $u_0 = 0 \implies x_1 = 2$ .

Wir prüfen die zweite Ableitung:

$$f''(u) = -6u^2 - 6u + 7 \Rightarrow f''(0) = 7 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

Der Funktionswert an dieser Stelle ist  $f(2) = -20$ .

**Tiefpunkt:**  $T_1(2 \mid -20)$

## 2. Intervall: $3 \leq x \leq 7$

Die Funktion lautet:

$$f(x) = 2x - 24 + \sin^2(\pi x)$$

Die erste Ableitung lautet unter Verwendung der Kettenregel:

$$f'(x) = 2 + 2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \cdot \pi = 2 + \pi \sin(2\pi x)$$

Wir setzen  $f'(x) = 0$ :

$$2 + \pi \sin(2\pi x) = 0 \implies \sin(2\pi x) = -\frac{2}{\pi} \approx -0,6366$$

Die beiden Basislösungen für das Argument  $2\pi x$  im Einheitskreis sind:

$$2\pi x \approx -0,6901 + 2k\pi \implies x_k \approx k - 0,1098$$

$$2\pi x \approx \pi - (-0,6901) + 2k\pi \implies x_l \approx k + 0,6098$$

Für das Intervall  $[3, 7]$  ergeben sich folgende relevante Werte ( $k \in \mathbb{Z}$ ):

- Für  $x_k$  ( $k = 4, 5, 6, 7$ ):  $x \approx 3,89; 4,89; 5,89; 6,89$
- Für  $x_l$  ( $k = 3, 4, 5, 6$ ):  $x \approx 3,61; 4,61; 5,61; 6,61$

Wir bestimmen die Art der Extrema mithilfe der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = 2\pi^2 \cos(2\pi x)$$

- Für  $x \approx k - 0,1098$  befindet sich der Winkel im 4. Quadranten, wo der Kosinus positiv ist:  $f''(x) > 0 \implies$  **Tiefpunkte**.
- Für  $x \approx k + 0,6098$  befindet sich der Winkel im 3. Quadranten, wo der Kosinus negativ ist:  $f''(x) < 0 \implies$  **Hochpunkte**.

—

### 3. Intervall: $7 < x \leq 10$

Die Funktion lautet:

$$f(x) = 2 \cos(2\pi x) - 12$$

Die erste Ableitung ist:

$$f'(x) = -4\pi \sin(2\pi x)$$

Wir setzen  $f'(x) = 0$ :

$$\sin(2\pi x) = 0 \implies 2\pi x = n\pi \implies x = \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$f''(x) = -8\pi^2 \cos(2\pi x)$$

Im Intervall  $(7, 10]$  erhalten wir:

- Für ungerade Vielfache von 0,5 ( $x = 7,5; 8,5; 9,5$ ) gilt  $\cos(2\pi x) = -1 \implies f''(x) > 0 \implies$  **Tiefpunkte**.
- Für ganzzahlige Werte ( $x = 8,0; 9,0; 10,0$ ) gilt  $\cos(2\pi x) = 1 \implies f''(x) < 0 \implies$  **Hochpunkte**.

—

### 4. Untersuchung der Übergangsstellen und Ränder

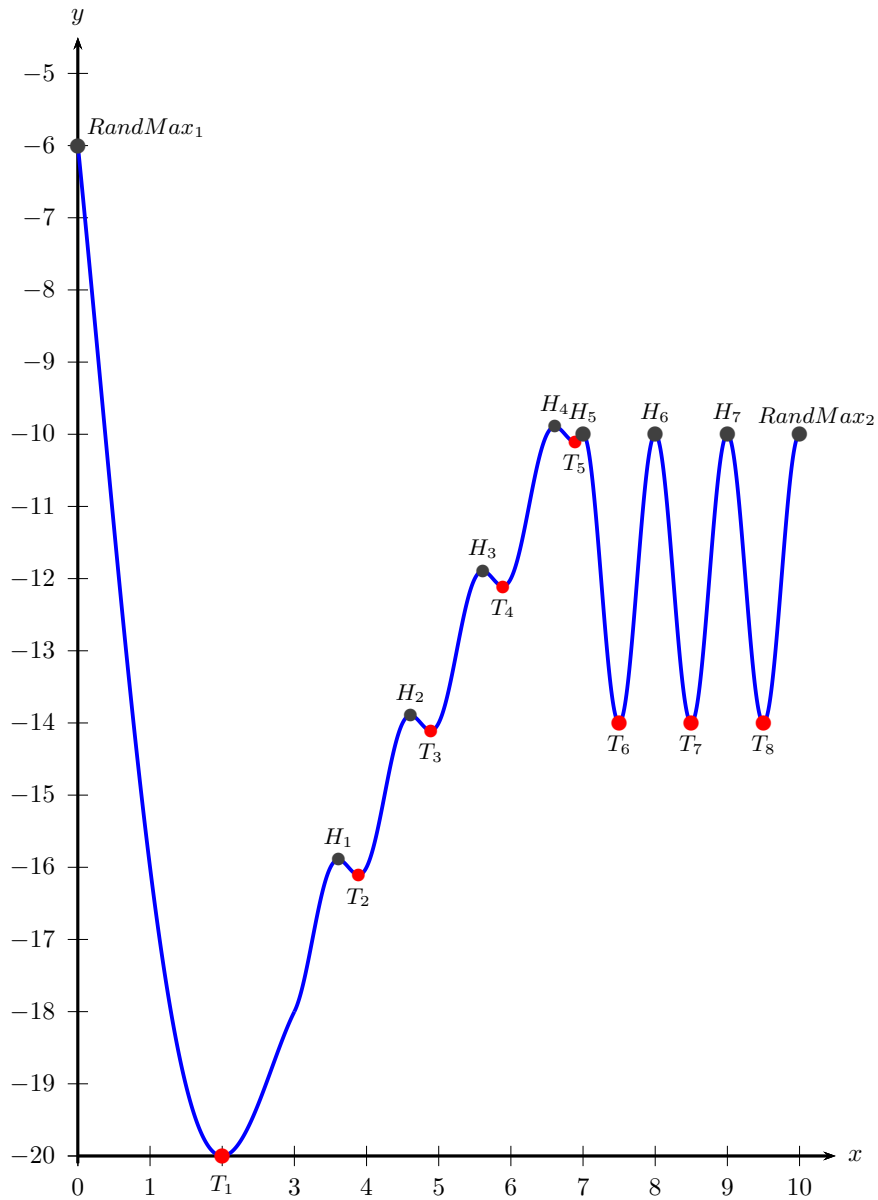
- **Bei  $x = 3$ :** Es gilt  $f(3) = -18$ . Die linksseitige Ableitung ist  $f'(3^-) = 2$  und die rechtsseitige Ableitung ist  $f'(3^+) = 2$ . Da die Ableitung dort stetig verläuft und ungleich Null ist, liegt kein Extremum vor.
- **Bei  $x = 7$ :** Es gilt  $f(7) = -10$ . Für  $x \rightarrow 7^-$  gilt  $f'(x) \rightarrow 2 > 0$  (Funktion steigt an). Für  $x \rightarrow 7^+$  gilt kurz nach der Grenze  $f'(x) < 0$  (Funktion fällt ab). Da die Funktion stetig ist und an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel der Steigung von  $+$  nach  $-$  vollzieht, liegt ein **lokaler Hochpunkt** (Knickpunkt) vor.

—

### Zusammenfassung aller lokalen Extrema im Definitionsbereich

Bezeichnung	$x$ -Koordinate	Punkt $(x   y)$ (gerundet)
$H_1$	$x \approx 3,61$	$(3,61   -15,89)$
$H_2$	$x \approx 4,61$	$(4,61   -13,89)$
$H_3$	$x \approx 5,61$	$(5,61   -11,89)$
$H_4$	$x \approx 6,61$	$(6,61   -9,89)$
$H_5$ (Knick)	$x = 7,00$	$(7,00   -10,00)$
$H_6$	$x = 8,00$	$(8,00   -10,00)$
$H_7$	$x = 9,00$	$(9,00   -10,00)$
$H_8$ (Rand)	$x = 10,00$	$(10,00   -10,00)$

Bezeichnung	$x$ -Koordinate	Punkt $(x   y)$ (gerundet)
$T_1$	$x = 2,00$	$(2,00   -20,00)$
$T_2$	$x \approx 3,89$	$(3,89   -16,11)$
$T_3$	$x \approx 4,89$	$(4,89   -14,11)$
$T_4$	$x \approx 5,89$	$(5,89   -12,11)$
$T_5$	$x \approx 6,89$	$(6,89   -10,11)$
$T_6$	$x = 7,50$	$(7,50   -14,00)$
$T_7$	$x = 8,50$	$(8,50   -14,00)$
$T_8$	$x = 9,50$	$(9,50   -14,00)$



Es gibt ein interessantes Krümmungsverhalten an der Stelle  $x = 3$ :

## Untersuchung auf einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$

Ein Wendepunkt liegt vor, wenn der Graph einer Funktion an einer Stelle sein Krümmungsverhalten ändert (d. h. ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung stattfindet). Da die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = 3$  stückweise definiert ist, müssen wir das Verhalten der zweiten Ableitung linksseitig ( $x \rightarrow 3^-$ ) und rechtsseitig ( $x \rightarrow 3^+$ ) untersuchen.

### 1. Linksseitige Untersuchung ( $0 \leq x < 3$ )

Für den Bereich links von  $x = 3$  gilt der Funktionsterm:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20$$

Die ersten beiden Ableitungen lauten hierbei:

$$f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2)$$

$$f''(x) = -6(x-2)^2 - 6(x-2) + 7$$

Wir betrachten den Grenzwert der zweiten Ableitung für  $x$  gegen 3 von links:

$$f''(3^-) = -6(3-2)^2 - 6(3-2) + 7 = -6(1)^2 - 6(1) + 7 = -5$$

Da  $f''(3^-) < 0$  ist, ist der Graph kurz vor der Stelle  $x = 3$  **rechtsgekrümmt** (konkav).

### 2. Rechtsseitige Untersuchung ( $3 \leq x \leq 7$ )

Für den Bereich rechts von  $x = 3$  gilt der Funktionsterm:

$$f(x) = 2x - 24 + \sin^2(\pi x)$$

Die ersten beiden Ableitungen lauten hierfür:

$$f'(x) = 2 + \pi \sin(2\pi x)$$

$$f''(x) = 2\pi^2 \cos(2\pi x)$$

Wir betrachten den Grenzwert der zweiten Ableitung für  $x$  gegen 3 von rechts:

$$f''(3^+) = 2\pi^2 \cos(2\pi \cdot 3) = 2\pi^2 \cos(6\pi)$$

Da  $\cos(6\pi) = 1$  ist, erhalten wir:

$$f''(3^+) = 2\pi^2 \cdot 1 = 2\pi^2 \approx 19,74$$

Da  $f''(3^+) > 0$  ist, ist der Graph kurz nach der Stelle  $x = 3$  **linksgekrümmt** (konvex).

## Fazit

An der Stelle  $x = 3$  ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen abrupt von einer Rechtskrümmung ( $f''(3^-) = -5$ ) in eine Linkskrümmung ( $f''(3^+) = 2\pi^2$ ).

Da ein **Krümmungswechsel** vorliegt, befindet sich an der Stelle  $x = 3$  ein **Wendepunkt**. Aufgrund des Sprungs in der zweiten Ableitung an der Nahtstelle handelt es sich mathematisch um einen sogenannten *Knick-Wendepunkt*.

3. Ist eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $]a, b[$ , dann existiert mindestens eine Stelle  $c \in ]a, b[$  mit:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eine Voraussetzung für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist somit die Differenzierbarkeit im offenen Intervall  $]0; 10[$

Es wurde aber gezeigt, dass die Funktion bei  $x = 7$  nicht ableitbar ist.

Dies schließt aber nicht aus, dass es Stellen geben könnte.

In der Aussagenlogik besagt das Prinzip der Kontraposition, dass eine Implikation logisch äquivalent zu ihrer kontraponierten Form ist.

- **Direkte Aussage (Implikation):**  $A \implies B$   
(sprich: „Wenn  $A$  gilt, dann folgt  $B$ “)
- **Kontraposition:**  $\neg B \implies \neg A$   
(sprich: „Wenn nicht  $B$  gilt, dann folgt nicht  $A$ “)

In der formalen Logik wird diese Gleichwertigkeit wie folgt notiert:

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$$

Somit folgt aus  $\neg A$  nicht zwingend  $\neg B$ . Wir bestimmen, an welchen Stellen die Ableitung den gewünschten Wert hat:

$$\frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{-10 + 6}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

Gesucht werden also Stellen, an denen die Steigung der Tangente  $-0,4$  beträgt.

Rechnerisch finden wir:

Zwischen  $x = 0$  und  $x = 2$  steigt der Ableitungswert stetig von  $f'(0) = -10$  auf  $f'(2) = 0$ . Somit existiert in diesem offenen Intervall laut Zwischenwertsatz (Ableitungsfunktion ist stetig!) sicher eine Stelle, an der  $f'(x) = -\frac{2}{5}$  ist. Der Taschenrechner liefert für den ersten Abschnitt:  $x \approx 1,944$ ,  $y \approx -19,989$ .

Die Existenz der Stelle können wir auch durch Gleichsetzen der ersten Ableitung mit dem Wert  $-0,4$  zeigen.

Wie müssen nachweisen, dass die stetige Hilfsfunktion  $f'(x) + 0,4 = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) + 0,4$  an den Rändern  $x = 0$  und  $x = 3$  die Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen haben. Dann gilt nämlich der Nullstellensatz von Bolzano, es existiert sicher eine Stelle im offenen Intervall  $]0; 3[$ , sodass die Hilfsfunktion dort den Wert 0 annimmt. Dies ist die gesuchte Stelle.

Im zweiten Abschnitt der Funktion gibt es vier Punkte, an denen die Steigung  $-0,4$  beträgt, im dritten Abschnitt drei (die Steigung kann hier von  $-4\pi$  bis  $4\pi$  gehen).

4. Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Ist eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$ , dann existiert mindestens ein  $c \in [a, b]$  mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung verlangt also nur, dass die Funktion im abgeschlossenen Intervall stetig ist. Dies erfüllt unsere Funktion.

$$\Delta h = \frac{\int_0^{10} f(x) dx}{10} = \frac{\int_0^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx + \int_7^{10} f(x) dx}{10}.$$

Wir berechnen die Stammfunktionen:

- $\int \left[ -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20 \right] dx =$   
 $-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^5}{5} - \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{(x-2)^3}{3} - 20x + C$
- $\int [2x - 24 + \sin^2(\pi x)] dx = x^2 - 24x + \int \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} dx =$   
 $x^2 - 24x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos(2\pi x) dx = x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} + C$
- $\int [2 \cos(2\pi x) - 12] dx = 2 \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} - 12x + C$

$$\Delta h = \frac{1}{10} \left\{ \left[ -\frac{(x-2)^5}{10} - \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{7(x-2)^3}{6} - 20x \right]_0^3 + \left[ x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} \right]_3^7 + \left[ \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - 12x \right]_7^{10} \right\} =$$

$$\frac{1}{10} \left[ -\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{7}{6} - 60 - \left( \frac{16}{5} - 4 - \frac{28}{3} \right) + 49 - \frac{329}{2} - \left( 9 - \frac{141}{2} \right) - 120 + 84 \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left( -\frac{2781}{20} \right) = -\frac{2781}{200} = -13,905.$$

Die Integrale der Winkelfunktionen kann man umgehen, wenn man den Mittelwert kennt, um den sie oszilliert.

Nimmt man an, dass der See ein gerader Zylinder mit einer Grundfläche  $A$  von  $57 \text{ km}^2$  und einer Höhe  $\Delta h$  ist, dann ergibt die Schätzung durch diesen Mittelwert der Höhe:

$$\begin{aligned} \Delta V &= A \cdot \Delta h = 57 \text{ km}^2 \cdot (-13,9 \text{ dm}) = \\ &= 57 \cdot (10^4 \text{ dm})^2 \cdot (-13,9 \text{ dm}) = \\ &= 57 \cdot 10^8 \cdot (-13,9) \text{ dm}^3 = \\ &= -7,93 \cdot 10^{10} \text{ dm}^3 \\ &= -7,93 \cdot 10^{10} \ell. \end{aligned}$$

Die mittlere Höhe hat aber gar nichts mit der Änderung des Wasserpegels von 2016 bis 2026 zu tun:

$$\Delta H = h(2026) - h(2016) = -4 \text{ dm}$$

$$\Delta V = A \cdot \Delta H = -2,28 \cdot 10^{10} \ell$$

Somit ist auch die Abschätzung nicht sinnvoll und liefert einen völlig anderen Wert!

Um mit der Abschätzung einen passablen Wert berechnen zu können, müsste nach dem durchschnittlichen Fehlvolumen gefragt werden. Dies steht aber weder im Originaltext noch in der Übersetzung.

## Lösung 2026 1. Session Problemstellung 2

1.

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1} \quad \text{mit } a \neq 0$$

Der Definitionsbereich der Funktion ist  $x \neq 1$ .

Untersuchung der Monotonie mithilfe der ersten Ableitung:

Für  $x \neq 1$  ergibt sich:

$$f'_a(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$$

Der Nenner ist überall dort positiv, wo die Funktion definiert ist, daher wird das Vorzeichen der ersten Ableitung nur durch den Zähler bestimmt:

$$f'_a(x) > 0 \rightarrow ax(x-2) > 0$$

Wenn  $a > 0$ , ergibt sich:

$$f'_a(x) > 0 \rightarrow x(x-2) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 2$$

Nun soll die Gerade  $y = k$  Tangente an die beiden Funktionen sein. Dies ist eine horizontale Gerade, somit ist die Steigung der Tangente 0 und auch die Ableitung der Funktion muss an der Berührstelle die Steigung 0 haben.

Für die Kurve von  $f(x)$  hat die erste Ableitung bei  $x = 0$  und  $x = 2$  den Wert 0.

Es muss daher gelten:

- für  $x = 0$ ,  $f_a(0) = y = k \rightarrow \frac{0}{-1} = k \rightarrow k = 0$
- für  $x = 2$ ,  $f_a(2) = y = k \rightarrow \frac{4a}{1} = k \rightarrow k = 4a$

Die Gerade mit der Gleichung  $y = k$  muss auch tangential zum Graphen  $\gamma$  der Funktion sein:

$$g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\frac{x}{x^2+1} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Wir suchen also die Extremstellen von  $g$ . Berechnen wir die erste Ableitung:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x > 0 \\ \frac{-x^2-1-(-x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \rightarrow g'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x > 0 \\ \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Differenzierbarkeit in  $x = 0$ :

- $g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1$
- $g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1$

Die rechts- und linksseitige Ableitung sind verschieden und endlich, daher ist  $x = 0$  ein Eckpunkt und die Gerade mit der Gleichung  $y = k$  kann in  $x = 0$  nicht tangential zu  $\gamma$  sein.

Bestimmen wir die Extremstellen von  $g$  im differenzierbaren Bereich.

- Für  $x > 0$ :

$$g'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x > 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2}$$

Die Gerade mit der Gleichung  $y = k$  ist tangential zu  $\gamma$  in  $x = 1$ , wenn  $k = \frac{1}{2}$  ist.

- Für  $x < 0$ :

$$g'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x < 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow g(-1) = \frac{1}{2}$$

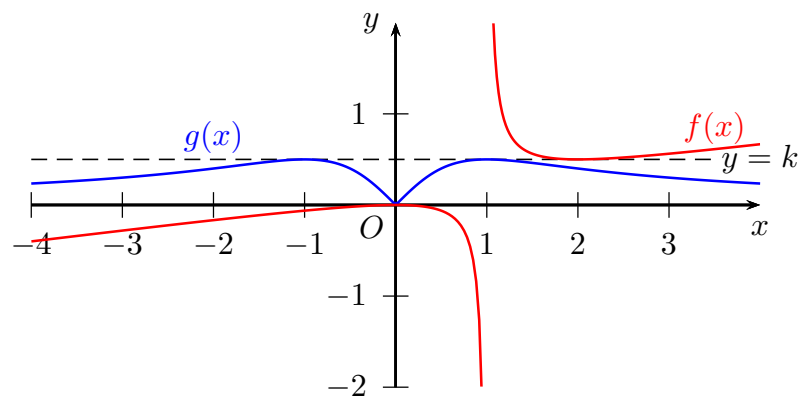
Die Gerade mit der Gleichung  $y = k$  ist tangential zu  $\gamma$  in  $x = -1$ , wenn  $k = \frac{1}{2}$  ist.

Die einzige Gerade mit der Gleichung  $y = k$ , die sowohl zu  $\varphi_a$  als auch zu  $\gamma$  tangential ist, erhält man für:

$$\begin{cases} k = 4a \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 4a \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir schließen den Fall  $k = 0$  aus, da die horizontale Gerade zwar tangential zu  $\varphi_a$ , aber nicht zu  $\gamma$  wäre.

Die gesuchten Werte sind folglich  $a = \frac{1}{8}$  und  $k = \frac{1}{2}$ .



- Wir betrachten die Extrempunkte  $A$  von  $\varphi_a$  mit  $x_A \neq 0$  und  $B$  von  $\gamma$  mit  $x_B > 0$ . Durch die im vorherigen Berechnungen ist bekannt, dass  $A(2; 4a)$  und  $B(1; \frac{1}{2})$  gilt. Die Länge der Strecke  $AB$  hängt vom Parameter  $a$  ab und ist durch folgende Funktion gegeben:

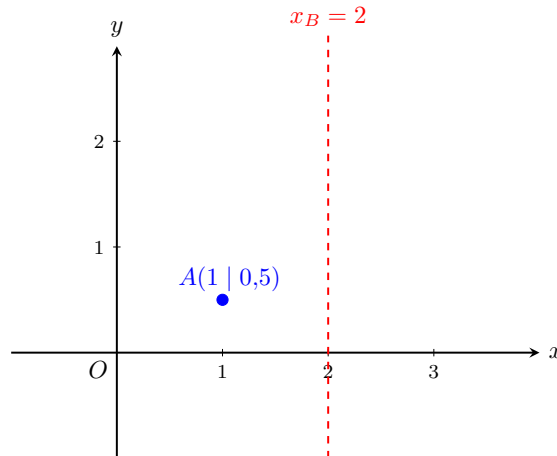
$$h(a) = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + (1-8a)^2}$$

Die Funktion  $h(a)$  ist für  $a \neq 0$  definiert (siehe Angabe), stets positiv und in ihrem Definitionsbereich stetig.

Das Minimum erhält man, wenn das Quadrat  $(1-8a)^2$  gleich 0 ist, also für  $1 = 8a \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

Die Lösung dieser Optimierungsaufgabe kann auch mit einer einfachen grafischen Überlegung erfolgen: Der Punkt  $B$  hat den  $x$ -Wert 2 und liegt daher auf der Geraden mit der Gleichung  $x = 2$ . Der Punkt  $A$  hat die Koordinaten  $A(1; 0,5)$ . Die kleinste Entfernung dieses Punktes von der Geraden ist der Abstand, also die senkrechte Verbindung. Somit hat der Punkt  $B$  den gleichen  $y$ -Wert wie  $A$ .

Daher gilt:  $0,5 = \frac{a \cdot 2^2}{2-1} \Rightarrow a = 0,125$



3. Kurvendiskussion:

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1}$$

Der Definitionsbereich ist  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Der Graph  $\varphi$  schneidet die  $x$ -Achse, und somit auch die  $y$ -Achse, im Ursprung  $(0; 0)$

Vorzeichen der Funktion:

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Daher sind die Funktionswerte für  $x > 1$  positiv.

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} \right) = +\infty$$

Die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  ist eine vertikale Asymptote für die Funktion (sowohl von links als auch von rechts).

Schiefe Asymptote (Polynomdivision):

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{8} \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} \right)$$

Die schiefe Asymptote ist daher  $y = \frac{1}{8}(x + 1)$

Die erste Ableitung wurde bereits zum bereits allgemein im ersten Teil durchgeführt;  $a$  wird durch

den Wert  $\frac{1}{8}$  ersetzen:

$$f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Die Funktion ist streng monoton steigend in  $] -\infty; 0[$  und in  $]2; +\infty[$ , sie ist streng monoton fallend in  $]0; 1[$  und in  $]1; 2[$ ;  $x = 0$  ist ein lokaler Hochpunkt (mit der Ordinate 0),  $x = 2$  ist ein lokaler Tiefpunkt (mit der Ordinate  $\frac{1}{2}$ ).

Der Definitionsbereich der ersten Ableitung ist  $\mathbb{R} - \{1\}$ , die Funktion  $f(x)$  ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig. Das Krümmungsverhalten wird mit Hilfe der zweiten Ableitung untersucht:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{4(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \rightarrow \frac{1}{4(x-1)^3} > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Daher ist die Funktion  $f$  im Intervall  $]1; +\infty[$  linksgekrümmt und im Intervall  $] -\infty; 1[$  rechtsgekrümmt. Da  $x = 1$  nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehört, gibt es keine Wendepunkte.

Symmetrie: Es handelt sich hier um einen Spezialfall. Falls eine gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad 2 und Nennergrad 1 vorliegt und eine vertikale und eine schiefe Asymptote vorliegen, dann ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Asymptotenschnittpunktes.

Daher hat  $f(x)$  den Symmetriepunkt  $(1; 0,25)$ .

Untersuchung der Funktion  $g$  (teilweise bereits in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführt):

$$g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{x}{x^2+1} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} & \text{für } x > 0 \\ \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Der Definitionsbereich von  $g$  ist  $\mathbb{R}$ , der Definitionsbereich von  $g'$  ist  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die Funktion ist stetig in  $\mathbb{R}$  und gerade, denn:

$$g(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|}{x^2 + 1} = g(x)$$

Daher ist ihr Graph symmetrisch zur  $y$ -Achse; wir müssen also die Funktion nur für  $x \geq 0$  untersuchen und die Ergebnisse auf  $x < 0$  übertragen.

Schnittstellen mit der  $x$ -Achse (Nullstellen):

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow g(x) = 0 \rightarrow \frac{|x|}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$$

Der Graph  $\gamma$  schneidet somit die  $x$ -Achse, und folglich auch die  $y$ -Achse, im Ursprung  $(0; 0)$ .

Vorzeichen der Funktion (für  $x \geq 0$ ):

$$g(x) > 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} > 0 \rightarrow x > 0$$

Die Funktion  $g$  ist positiv für  $x > 0$  und aus Symmetriegründen auch für  $x < 0$ ; sie ist also in ganz  $\mathbb{R}$  positiv, außer bei  $x = 0$ , wo sie null wird.

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0,$$

und (aus Symmetriegründen)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ .

Die Gerade mit der Gleichung  $y = 0$ , also die Abszissenachse, ist sowohl die linke als auch die rechte horizontale Asymptote.

Wir untersuchen die erste Ableitung. Wir haben bereits gesehen, dass die erste Ableitung an der Stelle  $x = 0$  nicht existiert, wo die Funktion einen Knickpunkt aufweist. Für  $x > 0$ :

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) > 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \rightarrow 1 - x^2 > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

Aufgrund der Symmetrie der Funktion gilt für  $x < 0$ , dass  $g'(x) > 0$  für  $x < -1$  ist.

Monotonieverhalten:

Die Funktion  $g$  ist streng monoton steigend in  $] -\infty; -1[ \cup ]0; 1[$   
und streng monoton fallend in  $] -1; 0[ \cup ]1; +\infty[$ .

Die Extrema haben die Koordinaten  $(-1; \frac{1}{2})$ ,  $(0; 0)$  und  $(1; \frac{1}{2})$ .

Wendestellen und Krümmungsverhalten

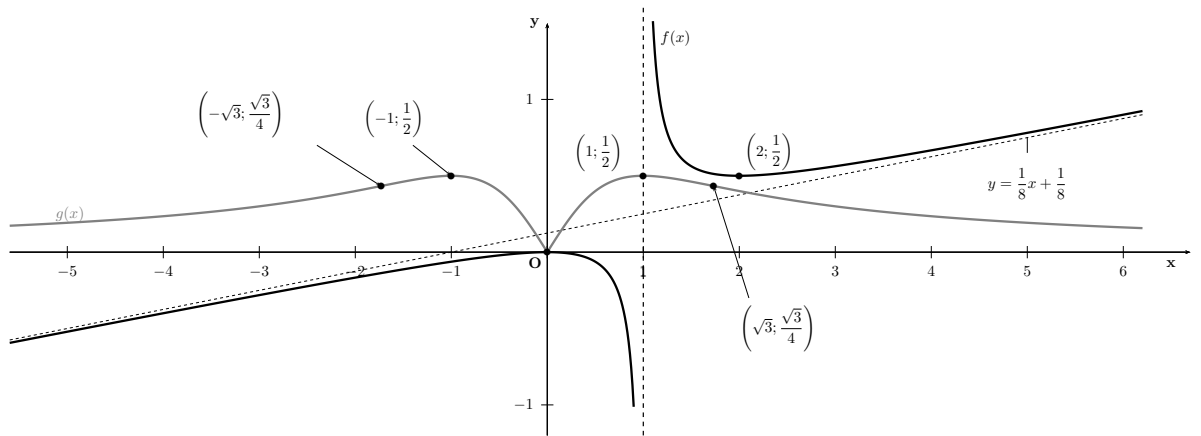
Wir untersuchen die zweite Ableitung. Für  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(x^2 + 1)(-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}; \end{aligned}$$

$$g''(x) > 0 \rightarrow \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} > 0 \rightarrow 2x(x^2 - 3) > 0.$$

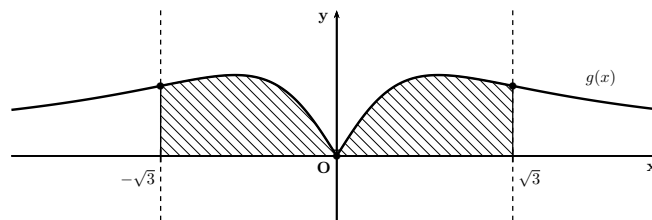
Der Ausdruck wird in Faktoren zerlegt. Zunächst untersuchen wir das Verhalten für  $x > 0$ :  
 $x^2 - 3 > 0$  für  $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$  gilt.

Die Funktion  $g$  ist linksgekrümmt in  $] \sqrt{3}; +\infty[$  und rechtsgekrümmt in  $]0; \sqrt{3}[$ ; sie weist einen Wendepunkt mit den Koordinaten  $(\sqrt{3}; g(-\sqrt{3})) = (\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$  auf. Aufgrund der Symmetrie ist die Funktion  $g$  auch in  $] -\infty; -\sqrt{3}[$  linksgekrümmt und in  $] -\sqrt{3}; 0[$  rechtsgekrümmt; sie weist einen Wendepunkt mit den Koordinaten  $(-\sqrt{3}; g(\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$  auf.



Mit Hilfe des Graphen sieht man, dass die Lösung der Ungleichung  $f(x) > g(x)$ , durch das Intervall gegeben ist, in dem der Graph von  $f$  oberhalb des Graphen von  $g$  liegt, also für  $x > 1$ .

4. Wir müssen den Flächeninhalt der endlichen Region berechnen, welche vom Graphen von  $g$ , der  $x$ -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen  $x = -\sqrt{3}$  und  $x = \sqrt{3}$  (diese Werte entsprechen den Wendestellen der Kurve) eingeschlossen wird.

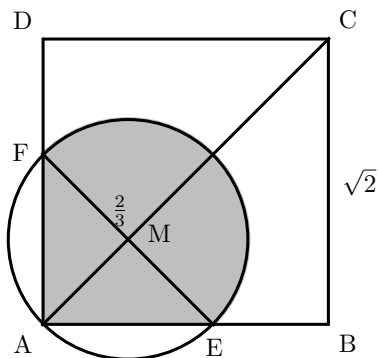


Die Region ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse, daher berechnen wir den Flächeninhalt im Intervall  $[0; \sqrt{3}]$  und multiplizieren mit 2.

$$A = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = [\ln(x^2 + 1)]_0^{\sqrt{3}} = \ln\left[(\sqrt{3})^2 + 1\right] - \ln(0^2 + 1) \\ = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 \approx 1,386$$

wobei wir das Integral mithilfe der allgemeinen Formel  $\int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \ln|z(x)|$  (Substitution  $z := x^2 + 1$  und Rücksubstitution) gelöst haben.

## Lösung 2026 1. Session Frage 1



Das Quadrat  $ABCD$  hat Seitenlänge  $\ell = \sqrt{2}$  dm, also die Fläche  $A_{\text{quad}} = \ell^2 = (\sqrt{2}\text{dm})^2 = 2 \text{ dm}^2$

Die überdeckte Fläche setzt sich aus einem Halbkreis und einem rechtwinkligen Dreieck mit Grundlinie und Höhe  $\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}$  dm (also Fläche  $\frac{4}{9}\text{dm}^2$ ) zusammen.

Somit ist die schraffierte Fläche gleich

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \pi \text{dm}^2 + \frac{4}{9}\text{dm}^2 = \frac{2 \cdot \pi + 4}{9}\text{dm}^2 \approx 1,143\text{dm}^2$$

Daher ist bereits mehr als die Hälfte der Quadratfläche bedeckt, wie Cecilia behauptet. Sie hat Recht.

## Lösung 2026 1. Session Frage 2

Zunächst werden die Abstände der Punkte bestimmt:

$$d(P; Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \quad (1)$$

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-4 - 5)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(A, C) = \overline{AC} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (-4 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{64 + 25 + 9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(A, D) = \overline{AD} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-4 - 4)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{9 + 64 + 25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(B, C) = \overline{BC} = \sqrt{(3 + 6)^2 + (5 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(B, D) = \overline{BD} = \sqrt{(3 + 1)^2 + (5 - 4)^2 + (-1 - 8)^2} = \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(C, D) = \overline{CD} = \sqrt{(-6 + 1)^2 + (1 - 4)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{25 + 9 + 64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Somit haben alle Punkte voneinander den gleichen Abstand und es handelt sich um ein Tetraeder.

Der Kugelmittelpunkt ist der Symmetriepunkt des Tetraeders. Dieser befindet sich sicherlich auf der Raumhöhe, die den Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks  $BCD$  mit dem Punkt  $A$  verbindet.

Die Raumkoordinaten des Schwerpunktes im Dreiecks  $BCD$  sind

$$S \left( \frac{3 + (-6) + (-1)}{3}; \frac{5 + 1 + 4}{3}; \frac{-1 + 0 + 8}{3} \right) = \left( \frac{-4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3} \right)$$

$$\vec{SA} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{3} \\ -4 - \frac{10}{3} \\ 3 - \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{22}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor steht normal zur Tangentialebene der Kugel in  $A$ .

Die Tangentialebene erfüllt die Gleichung  $5x - 11y + z + d = 0$  und enthält den Punkt  $A$ .

Daher gilt  $5 \cdot 2 - 11 \cdot (-4) + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -57$

Die Tangentialebene lautet daher  $5x - 11y + 2z - 57 = 0$

Bemerkung: Für die nicht gesuchten Koordinaten des Tetraederzentrums bildet man jeweils die Summe einer Raumkoordinate und dividiert diese Summe durch 4.

Eine schnellere Lösung für die Tangentialebene erhält man, wenn man berücksichtigt, dass die Tangentialebene aus Symmetriegründen senkrecht zur Höhe durch  $A$  steht. Auch die Ebene der Punkte  $BCD$  steht senkrecht zur Höhe durch  $A$ . Also sind beide Flächen parallel. Den gemeinsamen Normalenvektor erhalten wir durch

das Kreuzprodukt von  $\vec{BC}$  und  $\vec{BD}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 77 \\ -7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die weitere Vorgangsweise wurde bereits erläutert.

### Lösung 2026 1. Session Frage 3

$$M = \log_{10} \left( \frac{A}{A_0} \right) \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^M \Rightarrow A = A_0 \cdot 10^M$$

Daher gilt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \cdot 10^{M_1}}{A_0 \cdot 10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2}$$

Mit den gegebenen Werten  $M_1 = 6,5$  e  $M_2 = 6,0$  erhält man

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^{6,5-6,0} = 10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,16.$$

Das Verhältnis der Amplituden ist daher  $A_1/A_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$ .

Aus dem Gutenberg-Richter-Gesetz folgt mit der Definition des Logarithmus:

$$\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5M + 4,8 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{1,5M+4,8} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{1,5M+4,8}$$

Das Verhältnis zwischen den freigesetzten Energien ist daher:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{1,5M_1+4,8}}{E_0 \cdot 10^{1,5M_2+4,8}} = 10^{1,5(M_1-M_2)}$$

Einsetzen:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{1,5 \cdot (6,5-6,0)} = 10^{1,5 \cdot 0,5} = 10^{0,75} \approx 5,62$$

Das erste Erdbeben hat folglich eine Energie  $E_1$  freigesetzt, die ca. 5,62 Mal größer war als die Energie  $E_2$  des zweiten Bebens.

Die prozentuale Veränderung der Energie beim Übergang vom ersten zum zweiten Ereignis ist:

$$\frac{\Delta E}{E_1} \cdot 100\% = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \cdot 100\% = \left( \frac{E_2}{E_1} - 1 \right) \cdot 100\% = \left( \frac{1}{10^{-0,75}} - 1 \right) \cdot 100\% = (10^{-0,75} - 1) \cdot 100\% \approx -82,2\%$$

Natürlich kann auch die prozentuale Veränderung der Energie in Bezug auf das zweite Ereignis berechnet werden:

$$\frac{\Delta E}{E_2} \cdot 100\% = \frac{E_2 - E_1}{E_2} \cdot 100\% = \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \cdot 100\% = (1 - 10^{0,75}) \cdot 100\% \approx -462\%$$

### Lösung 2026 1. Session Frage 4

Die Funktion  $F(x)$  kann explizit berechnet werden, indem man sich an die Ableitung des Arkustangens erinnert. Es gilt

$$F(x) = \arctan(x) - \arctan(0) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(0) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

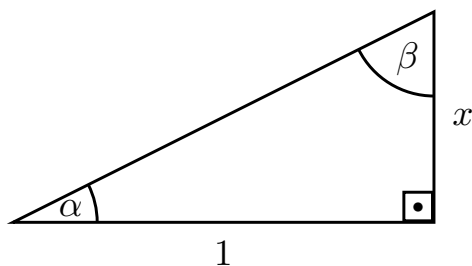
Durch Ableiten erhält man

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+1/x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Daher ist  $F$  konstant für  $x > 0$ . Im Besonderen genügt es, die Funktion  $F$  an einer beliebigen Stelle zu berechnen, um ihren Wert zu erhalten, zum Beispiel  $F(1) = \arctan(1) + \arctan(1/1) = \pi/2$ .

Das Ergebnis lässt sich grafisch interpretieren: Wir wählen ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 und  $x$ .

Daher gilt  $\tan(\alpha) = x/1 = x$ ;  $\tan(\beta) = 1/x$



$\alpha + \beta$  ergibt im rechtwinkligen Dreieck immer  $\frac{\pi}{2}$ .

Dementsprechend gilt  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

### Lösung 2026 1. Session Frage 5

Eine vertikale Asymptote des Logarithmus entsteht dort, wo das Argument  $x^2 + k$  gegen  $0^+$  strebt (da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$ ).

Daher muss für  $x = \pm\sqrt{3}$  gelten:  $x^2 + k = 0$ . Dies bestimmt  $k$ .

Das Argument  $x^2 + k$  wird null und strebt gegen  $0^+$  bei  $x = \pm\sqrt{3}$ .

$$(\pm\sqrt{3})^2 + k = 0 \implies 3 + k = 0 \implies k = -3.$$

Nach Anwenden des Logarithmengesetzes für Hochzahlen wird die Funktion zu

$$y = 5h \ln(x^2 - 3),$$

mit dem Definitionsbereich  $x^2 - 3 > 0$ , also  $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

Bestimmung der Punkte A und B:

Wir setzen  $y = 0$ :

$$5h \ln(x^2 - 3) = 0 \implies \ln(x^2 - 3) = 0 \implies x^2 - 3 = 1 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Beide gehören zum Definitionsbereich ( $|\pm 2| > \sqrt{3}$ ). Daher gilt:

$$A(-2; 0), \quad B(2; 0).$$

Berechnung der Ableitung und der Tangenten:

$$y' = 5h \cdot \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{10hx}{x^2 - 3}.$$

Steigung in  $B(2;0)$ :

$$m_B = \frac{10h \cdot 2}{2^2 - 3} = \frac{20h}{1} = 20h.$$

Gleichung der Tangente in B:

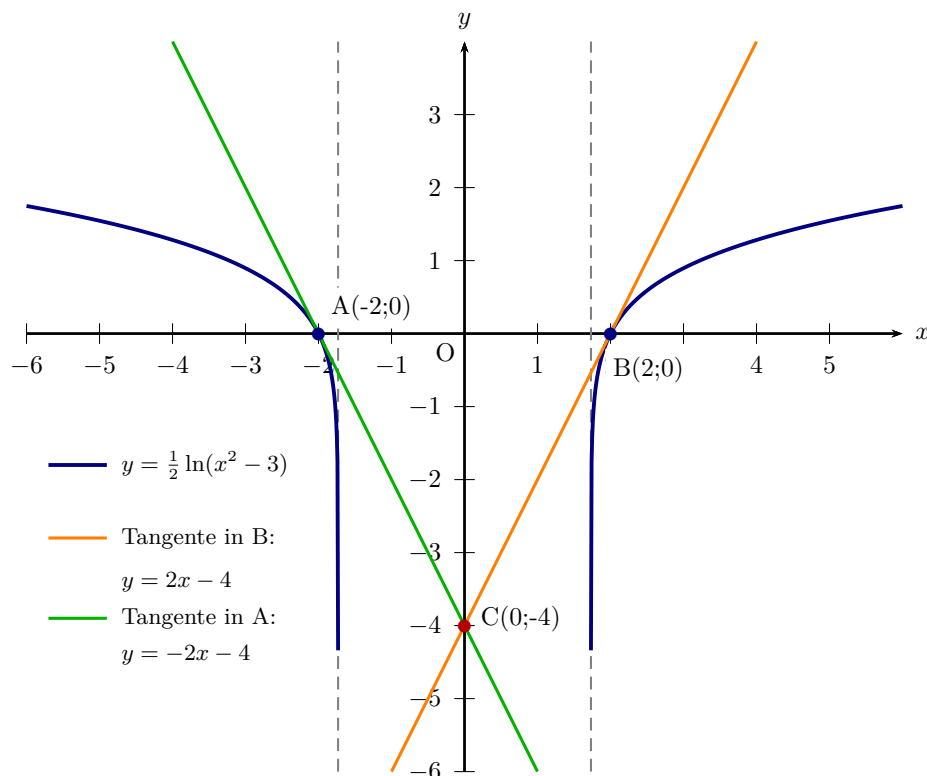
$$y - 0 = 20h(x - 2) \Rightarrow y = 20h(x - 2).$$

$C(0; -4)$  liegt auf der Tangente:

$$-4 = 20h \cdot (0 - 2) \Rightarrow -4 = -40h \implies h = \frac{1}{10}.$$

Da  $h = \frac{1}{10}$ , ist die Bedingung  $h \neq 0$  erfüllt.

Daher gilt:  $k = -3$ ;  $h = \frac{1}{10}$



### Lösung 2026 1. Session Frage 6

$f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$ . Für die schiefe Asymptote  $y = 3x - 2$  schreiben wir  $p(x) = (2x + 1)(3x - 2) + R$ , wobei  $R$  der konstante Rest ist.

Durch Ausmultiplizieren erhält man:  $(2x + 1)(3x - 2) = 6x^2 - 4x + 3x - 2 = 6x^2 - x - 2$ . Daher gilt  $p(x) = 6x^2 - x - 2 + R$ .

Außerdem gilt  $f(1) = 0$ , weil die Koordinaten von  $P(1;0)$  die Funktionsgleichung erfüllen:

$$f(1) = \frac{p(1)}{3} = 0 \rightarrow p(1) = 0.$$

$$p(1) = 6 - 1 - 2 + R = 3 + R = 0 \rightarrow R = -3.$$

Folglich ist  $p(x) = 6x^2 - x - 5$ .

Überprüfung:  $f(1) = \frac{6-1-5}{2+1} = \frac{0}{3} = 0 \checkmark$ .

Asymptote: Wenn man  $6x^2 - x - 5$  durch  $2x + 1$  dividiert, erhalten wir den Quotienten  $3x - 2$  und den Rest  $-\frac{3}{2x+1}$ .

Für  $x \rightarrow \infty$  strebt der Rest gegen 0.

## Lösung 2026 1. Session Frage 7

Man stellt zunächst fest, dass man zur Beantwortung der Fragen nicht notwendigerweise wissen muss, in welcher Reihenfolge die Karten unter den Spielern verteilt werden, d. h. ob zuerst 10 an Giuseppe und dann jeweils 10 an die anderen der Reihe nach ausgegeben werden, oder ob eine Karte pro Kopf im Rotationsverfahren bis zum Aufbrauchen des Stapels verteilt wird, oder auf eine andere Art und Weise.

Es ist so, als ob die bereits den anderen Spielern zugewiesenen Karten noch im Stapel wären, da wir keine Informationen darüber haben, welche es sind.

Es seien  $K_1, K_2, K_3$  die Ereignisse „die 1. / 2. / 3. Karte ist von der Farbe „Kelche“. Zu Beginn befinden sich 10 Kelche unter den 40 Karten; mit jedem erfolgreichen Zug verringern sich sowohl die Kelche als auch die Gesamtzahl der Karten um 1. Nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1) \cdot P(K_2 | K_1) \cdot P(K_3 | K_1 \cap K_2).$$

Einsetzen der Werte liefert:

$$P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{720}{59280} = \frac{3}{247} \simeq 1,21\%$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Anzahl der günstigen Fälle (wie viele Dreiergruppen gibt es von den 10 Kelche-Karten) durch die Anzahl der möglichen Dreiergruppen dividieren:

$$P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{3}{247} \simeq 1,21\%$$

Um analog dazu die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass sich unter den 10 Karten von Lorenzo die jeweilige Ass von Stäben (*bastoni*), Schwertern (*spade*) und Münzen (*denari*) befinden, zählen wir, wie viele Möglichkeiten es gibt, die anderen 7 Karten auszuwählen, und teilen durch die Anzahl der gesamten Möglichkeiten:

$$\frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}} = \frac{37!}{7!30!} \cdot \frac{10!30!}{40!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247} \simeq 1,21\%.$$

Bemerkung:

Es handelt sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen, weshalb die Wahrscheinlichkeit mit der **hypergeometrischen Verteilung** berechnet werden kann.

Die Gesamtheit der Karten wird in zwei Gruppen aufgeteilt: die gesuchten 3 Ass (Erfolg) und alle anderen Karten (Nicht-Erfolg).

- $N = 40$  (Gesamtzahl der Spielkarten)
- $M = 3$  (Anzahl der Erfolgsobjekte im Deck: Ass von Stäben, Münzen und Schwertern)
- $n = 10$  (Anzahl der von Lorenzo gezogenen Karten)
- $k = 3$  (Anzahl der gewünschten Treffer in Lorenzos Hand)

Die allgemeine Formel der hypergeometrischen Verteilung lautet:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Setzt man die Werte ein, erhält man:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{40-3}{10-3}}{\binom{40}{10}} = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{37}{7}}{\binom{40}{10}}$$

Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten:

- $\binom{3}{3} = 1$
- $\binom{37}{7} = 10.295.472$
- $\binom{40}{10} = 847.660.528$

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = 3) = \frac{1 \cdot 10.295.472}{847.660.528} = \frac{3}{247} \approx 0,012145$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Lorenzo drei bestimmte Asse auf der Hand hat, beträgt  $\frac{3}{247} \approx 1,21\%$ .

Beide Fragestellungen führen zum selben Wert  $\frac{3}{247}$ . Dies ist kein Zufall: In beiden Fällen wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass 3 bestimmte Karten (in a) drei Kelche in festgelegten Positionen, in b) drei bestimmte Asse) in eine Hand von 10 aus 40 Karten fallen, und diese Wahrscheinlichkeit hängt nicht von der Reihenfolge des Ziehens ab. Die Übereinstimmung bestätigt die Kohärenz der beiden Methoden (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik), die dasselbe Zufallsphänomen aus zwei äquivalenten Blickwinkeln beschreiben.

### Lösung 2026 1. Session Frage 8

Die Anzahl der möglichen Zusammensetzungen der Gruppen entspricht dem Produkt aus der Anzahl der Möglichkeiten, die Teams jeder Gruppe (Topf) in die Gruppen (A, B, C, D) einzuteilen, oder, mit anderen Worten, der Anzahl der Möglichkeiten, jedem Team eine Gruppe zuzuordnen.

Wir wissen, dass die Teams des ersten Topfes entsprechend ihrer Ranking-Reihenfolge in die Gruppen eingeteilt werden: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D.

Wir stellen fest, dass die vorgegebene Zuweisung der Teams des ersten Topfes die Gruppen voneinander unterscheidbar macht, was die Berechnung der Möglichkeiten betrifft, die Teams der anderen beiden Töpfe den Gruppen zuzuweisen.

Für die Teams des zweiten Topfes (Ranking von 5 bis 8) muss die Anzahl der Permutationen der vier Buchstaben ABCD berechnet werden. Zum Beispiel entspricht CABD der folgenden Zuweisung der Gruppen: 5-C, 6-A, 7-B, 8-D. Insgesamt gibt es also  $P_4 = 4! = 24$  Möglichkeiten, die Teams des zweiten Topfes den Gruppen zuzuweisen.

Für die Teams des dritten Topfes ist die Argumentation analog zu der der Teams des zweiten Topfes, aber in diesem Fall handelt es sich um die Permutationen von AABBCDD, d. h. die Permutationen von 8 Elementen, von denen vier jeweils zweimal wiederholt werden. Es gibt daher  $P_{8,2} = \frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$  Möglichkeiten, die Teams des dritten Topfes den Gruppen zuzuweisen.

Daher beträgt die Anzahl der möglichen Zusammensetzungen der vier Gruppen insgesamt  $24 \cdot 2520 = 60\,480$ .

Alternativ hätten wir für die Teams des dritten Topfes feststellen können, dass die Möglichkeiten, zwei Teams aus insgesamt 8 auszuwählen, um sie der ersten Gruppe zuzuweisen, durch  $C_{8,2}$  gegeben sind. Nacheinander sind die Möglichkeiten, zwei Teams aus den verbleibenden 6 auszuwählen, um sie der zweiten Gruppe zuzuweisen, durch  $C_{6,2}$  gegeben; für die dritte Gruppe sind die Möglichkeiten  $C_{4,2}$ . Für die vierte Gruppe ist die Wahl zwingend vorgegeben, da nur noch zwei Teams einzuteilen sind.

Die möglichen Zusammensetzungen der vier Gruppen sind also insgesamt:

$$24 \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} = 24 \cdot \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 60\,480.$$