Problemstellung 1

1. $f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, da $f(-x) = f(x)$ ist.

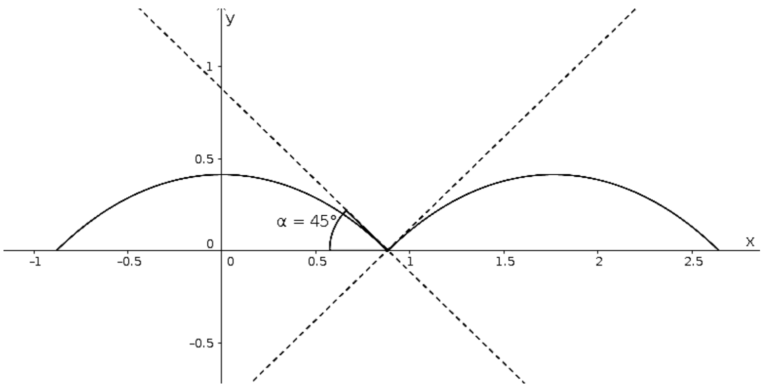
   Es ist $f'(x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2}$. Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 0$; $f(0) = \sqrt{2} - 1$.

   $f''(x) = -\dfrac{e^{-x} + e^x}{2} < 0$, daher ist der Graph rechtsgekrümmt. Außerdem liegt bei $x = 0$ ein Maximum vor.

   Berechnung der Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
e^x + e^{-x} &= 2\sqrt{2} \qquad \text{(Substitution: } a = e^x\text{)} \\
a + \frac{1}{a} - 2\sqrt{2} &= 0 \\
a^2 - 2\sqrt{2}a + 1 &= 0 \\
a_{1/2} &= \ln(\sqrt{2} \pm 1)
\end{aligned}
$$

2. Der linksseitige Steigung der Tangente bei $x = \ln(\sqrt{2} + 1)$ ergibt sich durch Einsetzen in $f'(x)$ zu -1. Mit $\tan(\alpha) = k$ erhält man $\alpha = 45°$ (siehe Skizze). Aus Symmetriegründen ist der Winkel auf der rechten Seite gleich groß und daher der Winkel zwischen den beiden Tangenten wie gefordert $90°$.



   Bogenlänge:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} \sqrt{1 + \frac{e^{-2x} - 2 + e^{2x}}{4}} dx \\
&= \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} \sqrt{\frac{e^{-2x} + 2 + e^{2x}}{4}} dx \\
&= \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} \frac{e^{-x} + e^x}{2} dx \\
&= \left[\frac{-e^{-x} + e^x}{2}\right]_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} = 2
\end{aligned}
$$

3. Die Dreiecke ΔAML und ΔALC sind ähnlich

   (weil beide rechtwinklig sind und der Winkel $\sphericalangle MAL = \sphericalangle ACL$).

   Es gilt: $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{CL}} = \dfrac{\overline{ML}}{\overline{AM}} = f'(x)$

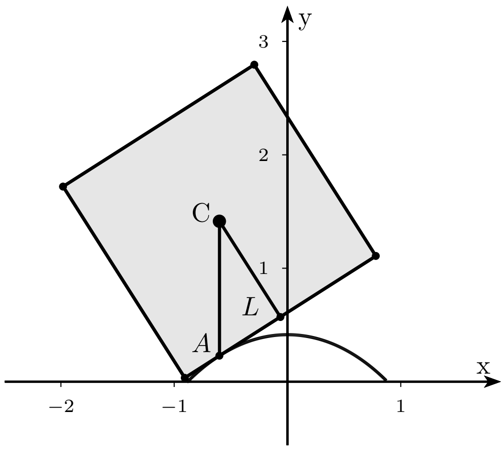
   (gleiches Verhältnis der Katheten; Ableitung entspricht der Tangentensteigung).

   Umformen ergibt: $\overline{AL} = \overline{CL} \cdot \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}$.

   Die Strecke $\overline{CL}$ ist 1 (halbe Quadratseite). Mit dem Satz des Pythagoras $\overline{AC}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{AL}^2$ kann die Strecke $\overline{AC} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$ berechnet werden.

   Der gesuchte Wert für d beträgt: $d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \sqrt{2}$.

   Der Wert ist unabhängig von x konstant $\sqrt{2}$.



4. Der Graph der neuen Funktion ist im Vergleich zur ursprünglichen etwas nach unten verschoben, die neuen Nullstellen sind wie angegeben bei $\pm\frac{\ln 3}{2}$.

   Die linksseitige Steigung der Tangente an der Stelle $\frac{\ln 3}{2}$ beträgt $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Daraus folgt ein Winkel von 30°. Aus den gleichen Überlegungen wie oben ist der Winkel zwischen den Tangenten diesmal 120°, dies entspricht dem Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks.

Problemstellung 2

1. Die Funktion f ist im ganzen Definitionsbereich stetig. Sie ist aber an den Eckpunkten

   $P(2n-1, f(2n-1))$ mit $n \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar.

   Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existiert nicht, da die Funktionswerte zwischen -1 und 1 oszillieren.

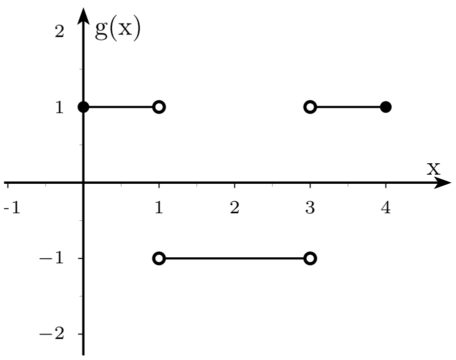
   Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, da der Zähler beschränkt und der Nenner gegen unendlich geht.

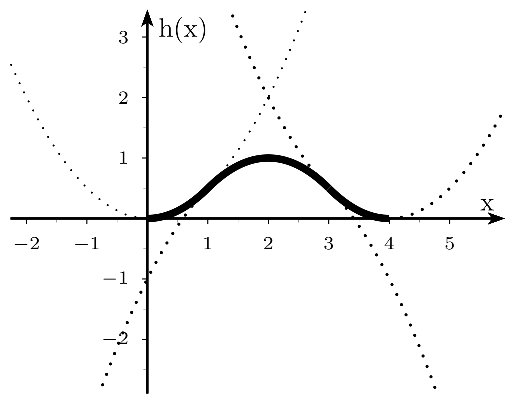
   Zum Zeichnen sind die folgenden Funktionsterme nützlich:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x+2 & \text{für } 1 < x \leqq 3 \\ x-4 & \text{für } 3 < x \leqq 4 \end{cases} \qquad g(x) = f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 \leqq x < 1 \\ -1 & \text{für } 1 < x < 3 \\ +1 & \text{für } 3 < x \leqq 4 \end{cases}$$

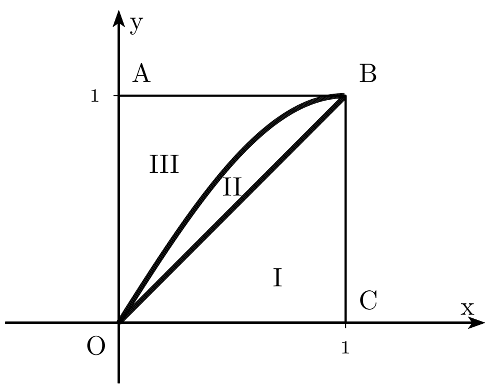
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{für } 1 < x \leqq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 & \text{für } 3 < x \leqq 4 \end{cases}$$

   Die gesuchten Graphen schauen wie folgt aus:





2. Die Formel $p = \dfrac{2\pi}{b}$ gibt den Zusammenhang zwischen der Periode $p = 4$ und dem Koeffizienten b an: $b = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.



   Die Laplace-Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Verhältnis $\dfrac{\text{Teilfläche}}{\text{Gesamtfläche}}$.

   Dabei ist die Gesamtfläche gleich 1.

$P_I \;= \frac{1}{2} = 50\%$

$P_{II} \;= \int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 13{,}66\%$

$P_{III} \;= 1 - \int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 36{,}34\%$

3. Es ist: $(f(x))^2 = x^2$ und $(s(x))^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

   Im Intervall [0,1] ist $x^2 \leqq x$, damit nimmt die Fläche I beim Quadrieren ab.

   Im selben Intervall ist $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leqq 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, also auch das Integral. Die oberste Fläche III und damit die Wahrscheinlichkeit P_{III} wird größer.

   Für die mittlere Fläche kann das Integral gebildet werden: $\int\limits_0^1 (\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2) dx = \frac{1}{6}$ (Partielle Integration). Damit wird diese Fläche auch größer.

4. Mit dem Schalenmodell ergibt sich die Fläche aus $\int 2\pi x f(x) dx$.

   $$V = \int\limits_0^1 2\pi \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} dx + \int\limits_1^3 2\pi \cdot x \cdot \left(2x - \frac{x^2}{2} - 1\right) dx = \frac{83}{12}\pi$$

Frage 1

Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man:

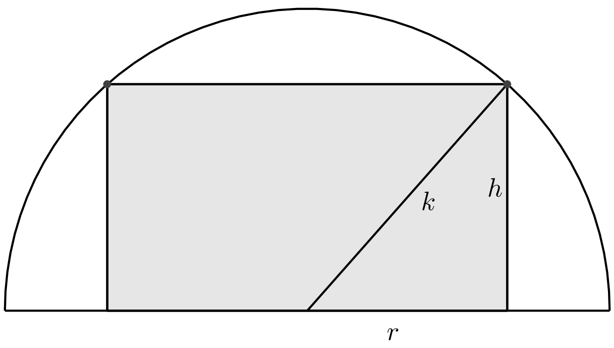
$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 \cdot e^x\right]_0^1 - 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x dx = 1e^1 - 0 - 2 \cdot E = e - 2E$$

Unter Verwendung dieses Ergebnisses führt wieder die partielle Integration zum Ziel:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = \left[e^x \cdot x^3\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = e - 3(e - 2E) = -2e + 6E$$

Frage 2

Es sei r der Zylinderradius und k der Kugelradius, dann gilt für das Volumen V der Plastikform (Halbkugel) in Abhängigkeit des Kugelradius: $V(k) = \frac{2}{3} \cdot k^3 \cdot \pi$.



Der Kuchen kann maximal so groß sein, dass er die Kuchenform von innen berührt. In der Seitenansicht entspricht dies einem Rechteck, welches einem Halbkreis eingeschrieben ist. Daraus ergibt sich die Beziehung: $r^2 + h^2 = k^2$.

Für den Kuchen, also dem Zylindervolumen Z erhält man:

$Z(r,h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$ bzw. $Z(h) = (k^2 - h^2) \cdot \pi \cdot h = \pi \cdot (hk^2 - h^3)$

Das maximale Volumen erhält man aus der Gleichung $Z'(h) = 0$, also $\pi(k^2 - 3h^2) = 0$ mit der Lösung $h = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$.

Dass es sich dabei um den maximalen Wert handelt kann durch $Z''(h) = \pi(-6h) < 0$ bestätigt werden.

Für das Kuchenvolumen ergibt sich mit dem obigen Wert $Z(k) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} k^3$.

Das Verhältnis der beiden Körper ergibt schließlich einen Wert, der immer kleiner als $\frac{3}{5} = 0{,}6$ ist:

$$\frac{Z}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} k^3}{\frac{2}{3} k^3 \cdot \pi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 < \frac{3}{5}$$

Frage 3

Damit der Grenzwert existiert, muss der Zähler für $x \to 0$ auch gegen Null gehen, daraus ergibt sich die Gleichung (für $x = 0$) $\sqrt{2b} - 6 = 0$, also $b = 18$. Nun kann die Regel von de L'Hospital angewandt werden, leitet man Zähler und Nenner ab, so ergibt sich die Gleichung: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{ax+2b}} \cdot a}{1} = 1$ Setzt man in diese Gleichung für $b = 18$ und $x = 0$ ein, so erhält man $a = 12$.

Frage 4

Gegeben ist folgende Dichtefunktion (es gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 & \text{falls } x \in [0{,}2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse außerhalb dem gegebenen Intervall überall Null. Den Durchschnittswert (Erwartungswert) einer stetigen Zufallsvariablen erhält man aus:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right]_0^2 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste ausgeloste Zahl exakt $\frac{4}{3}$ ist beträgt 0, weil

$P\left(\frac{4}{3} \leqq X \leqq \frac{4}{3}\right) = \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x)dx = 0.$

Für das Intervall [0,1] ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(X < 1) = P(0 < X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

Frage 5

Wählt man $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor, so ergibt sich die Parameterdarstellung:

$$r : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor steht normal zu der gesuchten Ebene. Diese hat damit die Form $5x - 3y - 2z + d = 0$. Setzt man den Punkt C in diese Gleichung ein, so erhält man $d = -10$ und damit die gesuchte Ebene in Koordinatenform:

$$\pi : 5x - 3y - 2z - 10 = 0$$

Frage 6

Wendet man die Regel von de L'Hospital mehrmals an, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{a(a-1)x^{a-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{a(a-1)(a-2)x^{a-3}}$$

Der Zähler des letzten Bruches ist erstmals ungleich Null. Nun muss a so gewählt werden, dass auch der Nenner ungleich Null ist, dies ist für $a = 3$ der Fall.

Der Grenzwert (nachdem nicht gefragt ist) lautet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{3(3-1)(3-2)x^{3-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{3 \cdot 2 \cdot 1x^0} = -\frac{1}{6}$$

Frage 7

Aus der Koordinatenform der Ebenengleichung kann man direkt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ablesen.
Die Gleichung der Geraden g, welche durch die beiden gesuchten Kugelmittelpunkte und dem Punkt in der Ebene P verläuft und gleichzeitig senkrecht zur Ebene steht, ist:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man für die möglichen Mittelpunkte in Abhängigkeit von λ: $M_\lambda = (1 + 1\lambda; 2\lambda; 2 - \lambda)$

Nun ist λ so zu bestimmen, dass der Abstand $\overline{MP} = \sqrt{6}$ ist:

Aus $\sqrt{(1 + \lambda - 1)^2 + (2\lambda - 0)^2 + (2 - \lambda - 2)^2} = \sqrt{6}$ erhält man $6\lambda^2 = 6$ und damit die Werte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Setzt man diese Werte für die Mittelpunkte ein, so erhält man die Koordinaten:

$$M_1 = (2{,}2{,}1) \qquad \text{und} \qquad M_{-1} = (0, -2{,}3)$$

Alternative Methode:

Von P aus $\pm\sqrt{6}$ mal den normierten Richtungsvektor (=Normalvektor der Ebene) abtragen:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Frage 8

Wenn der Wert 3 die doppelte Wahrscheinlichkeit haben soll, dann können statt der 12 Teile 13 Teile genommen werden, so ergibt sich:

$$P(X = 3) = \frac{2}{13} \approx 15{,}38\%$$

und für alle anderen Seiten die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 3) = \frac{1}{13}$.

Die Fragestellung führt auf eine Binomialverteilung mit $n = 5$ und den obigen Wahrscheinlichkeiten. Bei 5 Würfen soll die 3 wenigstens 2 Mal vorkommen, dies kann mit der Gegenwahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
P(X \geqq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{13}\right)^0\left(\frac{11}{13}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{2}{13}\right)^1\left(\frac{11}{13}\right)^4 \\
&= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{11^5}{13^5} - 5 \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{11^4}{13^4} \\
&\approx 0{,}1719 = 17{,}19\%
\end{aligned}$$

Frage 9

Zu zeigen ist die Existenz und die Eindeutigkeit:

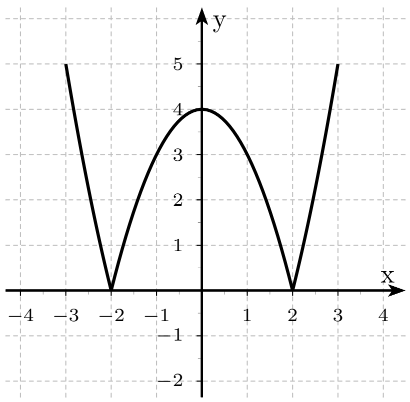
Die Lösung der Gleichung $\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$ entspricht den Nullstellen der Funktion

$f(x) = arctan(x) + x^3 + e^x$. Die Funktion f ist stetig und nach dem Nullstellensatz muss es mindestens eine Nullstelle im Intervall $[-1; 0]$ geben, da $f(-1) \approx -1.42 < 0$ und $f(0) = 1 > 0$ ist.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x > 0$, da jeder einzelne der 3 Summanden nie negativ (und nicht gleichzeitig Null) werden kann. Damit ist die Funktion streng monoton steigend. Eine streng monoton steigende Funktion kann höchstens eine Nullstelle haben. Damit ist gezeigt, dass die Gleichung genau eine Nullstelle hat.

Frage 10

Voraussetzung für das Theorem von Rolle ist, dass die Funktion im geschlossenen Intervall $[-3{,}3]$ stetig und im offenen Intervall $]-3;3[$ differenzierbar ist sowie $f(-3) = f(3)$.



Die Funktion hat bei $x = 2$ eine Nullstelle, denn es ist $f(x) = |4 - 2^2| = 0$, an dieser Stelle ist f aber nicht differenzierbar:

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (4 - x^2)' = \lim_{x \to 2^-} -2x = -4$$
$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (-(4 - x^2))' = \lim_{x \to 2^+} 2x = 4$$

An dieser Stelle hat f' also eine Sprungstelle, somit ist f zwar stetig, aber eben nicht differenzierbar.

$x = 0$ ist eine Nullstelle von $f'(x)$. Dieses Beispiel widerspricht nicht dem Theorem, da die Voraussetzung der Differenzierbarkeit für die Anwendbarkeit des Satzes nicht gegeben ist. (Trotzdem existiert eine waagrechte Tangente bei $x = 0$).

Der Satz von Rolle liefert keine Aussage, wenn seine Voraussetzung nicht erfüllt werden.