

Arbeit aus Mathematik

1. Session 2025

Realgymnasien

Lösung 2025 1. Session Problemstellung 1

1. Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = k|x|$ mit $k < 0$. Es soll gezeigt werden, dass diese Funktion für jedes k stetig, aber nicht differenzierbar ist.

1. Stetigkeit

Die Funktion $f_k(x) = k|x|$ lässt sich schreiben als:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } x \geq 0 \\ -kx & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beide Teilfunktionen sind linear und somit stetig. Um die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ zu überprüfen, betrachten wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-kx) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (kx) = 0 \\ f_k(0) &= k|0| = 0 \end{aligned}$$

Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmen, ist f_k stetig bei $x = 0$. Insgesamt ist f_k also auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

2. Differenzierbarkeit

Aus der Fallunterscheidung folgt:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx & \Rightarrow f'_k(x) = k & \text{für } x > 0 \\ -kx & \Rightarrow f'_k(x) = -k & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar (es existiert die Ableitung).

Da $f'_k(x)$ von links und rechts gegen unterschiedliche Werte strebt (weil laut Angabe $k < 0$ ist und daher $k \neq -k$), existiert die Ableitung bei $x = 0$ nicht.

Fazit:

Die Funktion $f_k(x) = k|x|$ ist für alle $k < 0$:

- **stetig** auf ganz $\mathbb{R}$,
- **nicht differenzierbar** an der Stelle $x = 0$, im restlichen Bereich differenzierbar.

Geometrie von Kreisausschnitten (=Kreissektoren) und dem Graphen der Funktion $f_k(x) = k|x|$

Gegeben sei die Funktion

$$f_k(x) = k|x| \quad \text{mit } k < 0,$$

sowie ein Kreis C_r mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $r > 0$, d. h. mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Wir betrachten den von der Funktion f_k nach unten begrenzten Ausschnitt des Kreises in der Halbebene $y \leq 0$.

Gegeben ist:

- die Fläche $A = \pi$
- den Umfang $U = 4 + \pi$

Sei φ der Winkel des Kreisausschnitts im Bogenmaß (Radiant), dann gilt:

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{A}{r^2\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi}{360} = \frac{b}{2r\pi}$$

Gleichsetzen $\frac{A}{r^2\pi} = \frac{b}{2r\pi}$ und umformen ergibt: $A = \frac{br}{2}$

Einsetzen in die Formeln ergibt:

- die Fläche $\frac{br}{2} = \pi$
- den Umfang $2r + b = 4 + \pi$

Formt man die erste Gleichung nach b um und setzt diese in die 2. Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2r + b &= 4 + \pi \\ 2r + \frac{2\pi}{r} &= 4 + \pi \\ 2r^2 - (4 + \pi)r + 2\pi &= 0 \end{aligned}$$

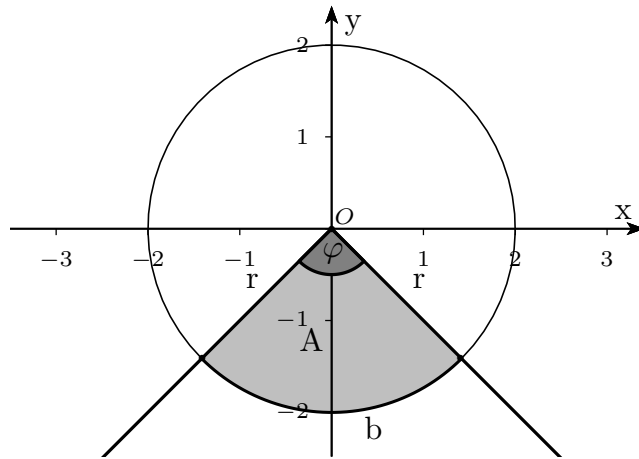
Diese quadratische Gleichung hat folgende Lösungen:

$$r = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{(4 + \pi)^2 - 16\pi}}{4} = \frac{4 + \pi \pm \sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}}{4}$$

$$r_1 = \frac{4 + \pi + (4 - \pi)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$r_2 = \frac{4 + \pi - (4 - \pi)}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Für $r = 2$ ergibt sich der größere der beiden Werte. In diesem Fall soll der Kreis C_2 sowie der Graph der Funktion $f_{-1}(x) = -|x|$ im Koordinatensystem Oxy dargestellt werden.



2. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Definitionsbereich von g

Damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, muss gelten:

$$4 - x^2 \geq 0 \text{ und damit } -2 \leq x \leq 2.$$

Also ist der Definitionsbereich:

$$D_g = [-2; 2]$$

Symmetrie

$$g(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = g(x)$$

Die Funktion ist also gerade und damit symmetrisch zur y-Achse.

Nicht differenzierbare Punkte

Ableitung von g :

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Differenzierbarkeit:

- (a) Im Inneren des Definitionsbereichs ist $g'(x)$ definiert.
- (b) An den Randstellen $x = \pm 2$ ist der Nenner $\sqrt{4 - x^2} = 0$, also ist die Ableitung dort nicht definiert.

Nicht differenzierbare Stellen: $x = -2$ und $x = 2$.

Monotonieverhalten

Untersuchen des Vorzeichens von $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

- Für $x \in]-2, 0[$ ist $-x > 0$ und die Wurzel positiv, $g'(x) > 0$, also ist f monoton steigend.
- Für $x \in]0, 2[$ ist $-x < 0$, $g'(x) < 0$, also ist f dort monoton fallend.

Wertebereich von g

Da $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, ist $g(x) \geq 0$.

- (a) Maximum bei $x = 0$, da dort x^2 minimal ist: $g(0) = \sqrt{4-0} = 2$
- (b) Minimum bei $x = \pm 2$, da dort x^2 maximal ist und daher der Radikand 0 wird: $g(\pm 2) = \sqrt{4-4} = 0$.

$$W_g = [0, 2]$$

Zusammenhang mit C_2 (Kreis)

Der Kreis C_2 mit Radius 2 hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 4$.

Umgestellt nach y : $y = \pm\sqrt{4-x^2}$.

Der Graf der Funktion $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ entspricht genau dem oberen Halbkreis.

Umkehrbarkeit von g

- (a) g ist nicht auf ganz $D_g = [-2, 2]$ umkehrbar, da g nicht streng monoton ist.
- (b) Um Umkehrbarkeit zu erreichen, muss man den Definitionsbereich einschränken auf ein Intervall, auf dem g streng monoton (notwendige und hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit differenzierbarer Funktionen) ist.

Wählt man den Bereich $[0, 2]$ so ist $b = 2$ und die Funktion in diesem Bereich monoton steigend und deshalb umkehrbar.

Vertauscht man x und y und formt man y um, so erhält man wieder dieselbe Funktion als Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2} = h(x)$.

3. Gegeben:

- Funktion $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ (oberer Halbkreis mit Radius 2)
- Punkt A auf g im 1. Quadranten: $A(x, \sqrt{4-x^2})$ mit $x \in (0, 2)$
- M : Projektion von A auf die x -Achse $\Rightarrow M(x, 0)$
- R : Projektion von A auf die y -Achse $\Rightarrow R(0, \sqrt{4-x^2})$
- O : Ursprung $(0, 0)$
- Viereck $AMOR$ ist ein Rechteck (da Projektionen orthogonal zu den Achsen sind)

1. Flächenmaximierung des Vierecks $AMOR$

Fläche F des Rechtecks $AMOR$:

$$F(x) = \text{Länge} \cdot \text{Höhe} = x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

Maximierung:

- (a) Ableitung bilden:

$$F'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

- (b) Nullstelle von $F'(x)$:

$$4-2x^2 = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \sqrt{2} \quad (\text{da } x > 0)$$

(c) Überprüfung (2. Ableitung oder Vorzeichenwechsel):

- $F'(x) > 0$ für $x < \sqrt{2}$ (steigend)
- $F'(x) < 0$ für $x > \sqrt{2}$ (fallend)
- $\Rightarrow$ Maximum bei $x = \sqrt{2}$

Koordinaten von A:

$$A\left(\sqrt{2}, \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}\right) = A\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

2. Überprüfung, dass AMOR ein Quadrat ist:

- Seitenlängen:
 - $AM = \sqrt{2}$ (Höhe)
 - $AR = \sqrt{2}$ (Länge)
- Alle Winkel sind $90^\circ \Rightarrow$ Quadrat.

3. Maximierung des Umfangs U :

Umfang des Quadrats AMOR:

$$U(x) = 2\left(x + \sqrt{4 - x^2}\right)$$

Wir bestimmen die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} U'(x) &= 2 + \frac{2}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) \\ &= 2 - \frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Ableitung gleich null:

$$2 = \frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{4 - x^2} = 2x \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$$

Beide Seiten quadrieren:

$$4 - x^2 = x^2 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Nun berechnen wir y :

$$y = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

Das Quadrat AMOR mit $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hat sowohl maximale Fläche als auch maximalen Umfang.

Zusammenfassung:

- **Punkt A für maximale Fläche/Umfang:** $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- **Viereck AMOR:** Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{2}$
- **Maximale Fläche:** $F = 2$
- **Maximaler Umfang:** $U = 4\sqrt{2}$

4. 1. Berechnung von $F(2)$

Die Funktion

$$F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt$$

beschreibt die Fläche unter der Halbkreisfunktion mit Radius 2, da $\sqrt{4-t^2}$ die obere Halbkreislinie ist.

Somit ergibt sich:

$$F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{4-t^2} dt = \text{Fläche eines Halbkreises mit Radius } 2 = \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$$

2. Monotonie

Durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt \right) = \sqrt{4-x^2}$$

Da $\sqrt{4-x^2} \geq 0$ für $x \in [-2, 2]$, ist F auf diesem Intervall **monoton wachsend**. Da die Ableitung nur an den Rändern 0 wird und ansonsten positiv ist, ist F streng monoton wachsend auf $(-2, 2)$.

3. Krümmung Die zweite Ableitung ergibt sich durch:

$$F''(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{4-x^2} \right) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Krümmungsverhalten:

- $F''(x) > 0$ für $x < 0$: konvex (linksgekrümmt)
- $F''(x) < 0$ für $x > 0$: konkav (rechtsgekrümmt)
- $F''(x) = 0$ bei $x = 0$: Wendepunkt

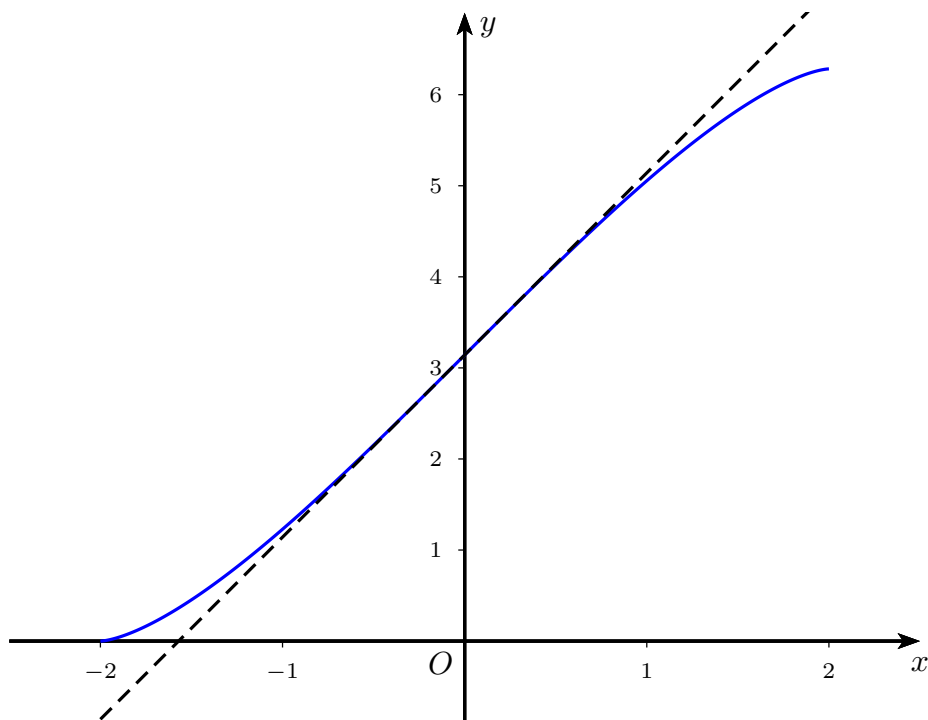
4. Tangentengleichung am Wendepunkt $x = 0$

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-2}^0 \sqrt{4-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi && \text{halber Halbkreis mit } r=2 \\ F'(0) &= \sqrt{4-0^2} = 2 \end{aligned}$$

Tangente im Punkt $(0, \pi)$:

$$y = F'(0) \cdot x + F(0) = 2x + \pi$$

5. Graph



- **Blau:** Graph von $F(x)$
- **gestrichelt:** Tangente im Wendepunkt $x = 0$
- Wendepunkt bei $(0, \pi)$

Bemerkung: Die Untersuchung von $F(x)$ kann auch durch die Berechnung des Kreisintegrals durchgeführt werden:

$$F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4-t^2} dt = \left[\frac{t}{2} \sqrt{4-t^2} + 2 \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{-2}^x = \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$$

Lösung 2025 1. Session Problemstellung 2

1.

$$f(x) = p(x)e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x)e^{p(x)}.$$

Da die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ zweiten Grades sind, gilt:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

mit $a_2 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$.

Gegeben: $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

Gegeben: $f(1) = 0 \Rightarrow a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \Rightarrow p(x) = a_2x^2 - a_2x$

Gegeben: $f'(\varphi) = 0$.

Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = (2a_2x - a_2)e^{a_2x^2 - a_2x} + (a_2x^2 - a_2x)(2a_2x - a_2)e^{a_2x^2 - a_2x} = (2a_2x - a_2)e^{a_2x^2 - a_2x} [1 + (a_2x^2 - a_2x)] = 0.$$

Einsetzen von φ in die eckige Klammer (die Exponentialfunktion ist nie 0, die erste Klammer 0 gesetzt würde $a_2 = 0$ liefern) ergibt: $1 + a_2(\varphi^2 - \varphi) = 0$ Wer sich noch an den Goldenen Schnitt erinnern kann:

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ansonsten rechnet man den Wert der Klammer für $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ händisch aus. $\Rightarrow a_2 = -1$.

Also:

$$p(x) = -x^2 + x.$$

Für $g(x)$ gilt:

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g(-\varphi) = 0.$$

$$g(x) = (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{-x^2+x}$$

Aus $g(0) = 1$ folgt $b_0 = 1$

$$g'(x) = (2b_2x + b_1)e^{-x^2+x} + (b_2x^2 + b_1x + 1) \cdot (1 - 2x)e^{-x^2+x} = e^{-x^2+x}(2b_2x + b_1 + b_2x^2 + b_1x + 1 - 2b_2x^3 - 2b_1x^2 - 2x)$$

Aus $g'(0) = 0$ folgt $b_1 = -1$

Aus $g(-\varphi) = 0$ und $g(x) = (b_2x^2 - x + 1)e^{-x^2+x}$ folgt:

$$0 = [b_2(-\varphi)^2 - (-\varphi) + 1]e^{-(\varphi)^2-\varphi} = (b_2\varphi^2 + \varphi + 1)e^{-\varphi^2-\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{-\varphi - 1}{\varphi^2} = -1$$

$\Rightarrow q(x) = -x^2 - x + 1$. Einfachere Herleitung:

Wenn die quadratische Funktion $g(x)$ bei $-\varphi = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ eine Nullstelle hat, dann muss wegen der

Mitternachtsformel die zweite Nullstelle bei $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ sein. Mit Hilfe des Satzes von Vieta kann man durch folgenden Ansatz weiterrechnen:

$g(x) = b_2(x^2 + x - 1)$. Der fehlende Koeffizient ergibt sich aus $g(0) = 1$ folgt $b_0 = 1$.

2. Untersuchung der Funktion $f(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2}$.

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, überall stetig und differenzierbar (da es sich um ein Produkt differenzierbarer Funktionen handelt).
- nicht achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ($f(-x) \neq f(x)$) und nicht punktsymmetrisch bezüglich Ursprung, da $f(-x) \neq -f(x)$
- Nullstellen: $x = 0, x = 1$.
- positiv: für $0 < x < 1$, da der Faktor mit der Exponentialfunktion immer positiv ist.

- Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - x^2)e^{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - x^2}{e^{x-x^2}} = 0$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als die Polynomfunktionen, existiert eine horizontale Asymptote $y = 0$ (x-Achse)

Genauer: Der Grenzwert lässt sich mit de L'Hospital zeigen (Form $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - x^2}{e^{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x}{(2x - 1) \cdot e^{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{e^{x^2-x}} = 0$$

Nur beim zweiten Gleichheitszeichen wird der Satz angewandt, die weitere Vereinfachung erfolgt durch Kürzen!

- erste Ableitung:

$$f'(x) = (1 - 2x)(x - x^2 + 1)e^{x-x^2}$$

Extrema (erste Ableitung 0 setzen) bei $x = 0,5, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, Maximum bei $x = 0,5$, da dort die erste Ableitung ihr Vorzeichen von + nach - wechselt; Minimum bei $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, da dort die erste Ableitung ihr Vorzeichen von - nach + wechselt (eventuell auch mit der 2. Ableitung überprüfbar).

- Werte:

$$f\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{e}, \quad f(0,5) = \frac{\sqrt[4]{e}}{4} \Rightarrow \text{Wertemenge: } \left[-\frac{1}{e}, \frac{\sqrt[4]{e}}{4}\right]$$

- Zweite Ableitung:

$$f''(x) = x(x - 1)(-4x^2 + 4x + 9)e^{x-x^2}$$

Wendestellen bei $x = 0, x = 1, x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$.

Die Wendepunkte sind $\left(\frac{1 - \sqrt{10}}{2}; -\frac{9}{4}e^{-\frac{9}{4}}\right); (0; 0); (1; 0); \left(\frac{1 + \sqrt{10}}{2}; -\frac{9}{4}e^{-\frac{9}{4}}\right)$

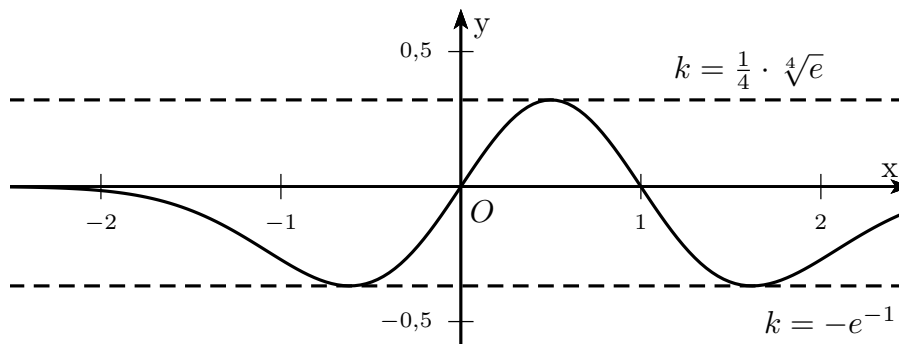
- Symmetrie zur Achse $x = 0,5$ vorhanden, da $f(1 - x) = f(x)$:

$f(1 - x) = (1 - x - (1 - x)^2)e^{1-x-(1-x)^2} = (x - x^2)e^{x-x^2} = f(x)$ Warum setzen wir $1 - x$ ein? Spiegeln wir einen Punkt P an der Geraden $x = 0,5$ und erhalten den Bildpunkt P_B , so ist der Mittelwert der

x-Werte beider Punkte gleich 0,5.

$$\frac{x_P + x_B}{2} = 0,5 \Rightarrow x_B = 1 - x_P$$

- Die Anzahl der Lösungen von $f(x) = k$ abhängig von k finden wir durch die Extremstellen des Graphen:



- keine Lösung für $k > \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
- 1 Lösung für $k = \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
- 2 Lösungen für $0 \leq k < \frac{\sqrt[4]{e}}{4}$
- 4 Lösungen für $-\frac{1}{e} < k < 0$
- 2 Lösungen für $k = -\frac{1}{e}$
- keine Lösung für $k < -\frac{1}{e}$

3. Die Nullstellen von $g(x) = (1 - x - x^2)e^{x-x^2}$ sind:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Hierzu haben wir das Polynom 0 gesetzt. Zu zeigen ist noch, dass $\frac{1}{\varphi} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{4}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi}$$

Leichter erfolgt das Nachrechnen mit Hilfe des Satzes von Vieta: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Die erste Lösung ist laut Angabe $-\varphi$, $c = 1$, $a = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{x_1} = \frac{1}{\varphi}$

Falls die Geraden g_{AC} und g_{BC} senkrecht zueinander sind, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig bei C .

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - (-\varphi)} = \frac{1}{\varphi}$$

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 0}{0 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$$

$$k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -1$$

Die beiden Steigungen sind also negativ-reziprok zueinander, die Geraden scheiden sich rechtwinklig, also ist das Dreieck in C rechtwinklig.

Schnittstelle der beiden Funktionen: $f(x) = g(x) \Rightarrow x - x^2 = 1 - x - x^2 \Rightarrow x = 0,5$.

Der Abstand der Punkte $P_1(x, f(x))$ und $P_2(x, g(x))$ ist:

$$h(x) = |f(x) - g(x)| = |2x - 1|e^{x-x^2}$$

Für $x > 0,5$ ist das Betragszeichen nicht notwendig. Das Extremum erhält man durch Ableiten:

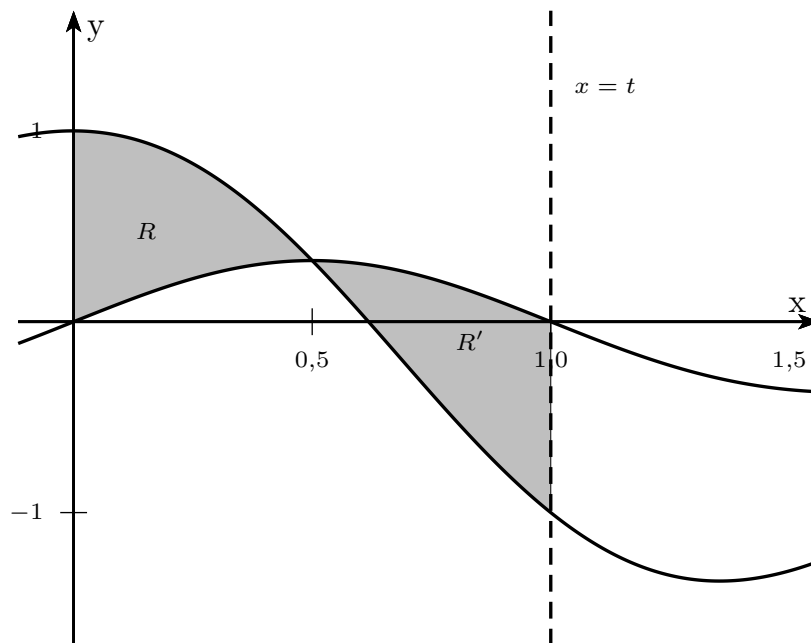
$$h'(x) = 2e^{x-x^2} + (2x-1)(1-2x) \cdot e^{x-x^2} = (-4x^2 + 4x + 1) \cdot e^{x-x^2} = 0$$

$$\text{Maximum bei } x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}}$$

An dieser Stelle wechselt die Ableitungsfunktion von $+$ nach $-$ (betrachte dazu $-4x^2 + 4x + 1$, da die Exponentialfunktion immer positive Werte liefert)

4. Die Fläche der Region R , die in der Abbildung dargestellt ist, beträgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)e^{x-x^2} dx = \left[e^{x-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - 1 = \sqrt[4]{e} - 1$$



Die Stammfunktion ergibt sich durch Substitution: $z := x - x^2$ (man sieht hier: im Integranden ist die Ableitung des Exponenten als Faktor enthalten! Daher ist die Stammfunktion so einfach!)

Die Fläche der Region R' (in Abhängigkeit von t) ist:

$$\int_{\frac{1}{2}}^t (f(x) - g(x)) dx = \int_{\frac{1}{2}}^t -(1-2x)e^{x-x^2} dx = \left[-e^{x-x^2} \right]_{\frac{1}{2}}^t = \sqrt[4]{e} - e^{t-t^2}$$

Wir setzen die Flächen der Regionen R und R' gleich, um t zu bestimmen:

$$\sqrt[4]{e} - 1 = \sqrt[4]{e} - e^{t-t^2} \Rightarrow e^{t-t^2} = 1 \Rightarrow t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ oder } t = 1$$

Da $t \geq \frac{1}{2}$ sein muss, ist die einzige zulässige Lösung $t = 1$.

Lösung 2025 1. Session Frage 1

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:

- M ist der Mittelpunkt der Seite BC ,
- Punkt B' liegt auf der Seite AB mit $AB' = \frac{1}{3}AB$,
- Punkt C' liegt auf der Seite AC mit $AC' = \frac{1}{3}AC$.

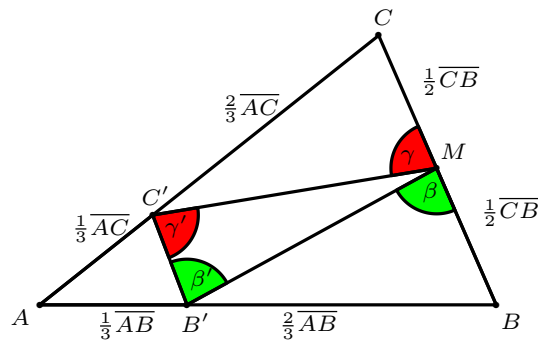
Zu zeigen: Die Seiten AB und AC sind kongruent, wenn die Strecken MB' und MC' kongruent sind.

Die Aufgabe kann elementargeometrisch oder auch mit Hilfe der Analytischen Geometrie gezeigt werden.

Elementargeometrisch:

Voraussetzung:

- $MC' = MB'$ (kongruent bedeutet gleich lang)
- $MB = MC$ (M ist Mittelpunkt der Strecke BC)
- $\frac{AC'}{AC} = \frac{1}{3}$ und $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{3}$



Aus Punkt 3 folgt $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$ und damit auch

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}.$$

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass die Strecken $B'C'$ und BC parallel sind, da AB und AC im gleichen Verhältnis geteilt werden!

Damit sind die Winkel γ' und γ bzw. β' und β jeweils gleich groß, da es sich um Z-Winkel handelt.

Laut Voraussetzung ist $MC' = MB'$. Damit ist das Dreieck $B'MC'$ gleichschenkelig und deshalb gilt $\beta' = \gamma'$, also auch $\beta = \gamma$.

Daraus folgt, dass die Dreiecke $\triangle C'MC$ und $\triangle B'MB$ kongruent sind, da diese Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (SWS-Satz).

Damit sind die Seiten $C'C$ und $B'B$ gleich lang, also $\frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}AB$ und deshalb $AC = AB$. ■

Mit Hilfe der Analytischen Geometrie:

Wir wählen ein Koordinatensystem mit:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0) \\ B &= (b, 0) \\ C &= (x_c, y_c) \end{aligned}$$

Weitere Punkte:

$$\begin{aligned}M &= \left(\frac{b+x_c}{2}, \frac{y_c}{2}\right) \\B' &= \left(\frac{b}{3}, 0\right) \\C' &= \left(\frac{x_c}{3}, \frac{y_c}{3}\right)\end{aligned}$$

Die Quadrate der Abstände sind:

$$\begin{aligned}MB'^2 &= \left(\frac{b+x_c}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+3x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2 \\MC'^2 &= \left(\frac{b+x_c}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2} - \frac{y_c}{3}\right)^2 = \left(\frac{3b+x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{6}\right)^2\end{aligned}$$

Laut einer Voraussetzung sind diese Quadrate gleich!

$$\left(\frac{b+3x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{2}\right)^2 = \left(\frac{3b+x_c}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{6}\right)^2$$

Multipliziert man beide Seiten mit 36:

$$(b+3x_c)^2 + (3y_c)^2 = (3b+x_c)^2 + (y_c)^2$$

Daraus erhalten wir durch Vereinfachen $b^2 = x_c^2 + y_c^2$

Also:

$$AB^2 = AC^2; AB = AC$$

Die Aussage ist damit bewiesen. ■

Lösung 2025 1. Session Frage 2

Lage einer Ebene zur Kugel Gegeben ist die Kugeloberfläche mit Gleichung:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$$

Dies ist eine Kugel mit:

- Mittelpunkt $M = (1, 2, 0)$
- Radius $r = 1$

Gegeben ist außerdem die Ebene π mit Gleichung:

$$x - 2y - 2z + d = 0$$

1. Abstand des Mittelpunktes zur Ebene Die allgemeine Formel für den Abstand eines Punktes $M(x_0, y_0, z_0)$ von der Ebene $ax + by + cz + d = 0$ lautet:

$$\text{Abstand} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Einsetzen von:

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -2, \quad d = d, \quad M = (1, 2, 0)$$

ergibt:

$$\text{Abstand} = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 4 + d|}{\sqrt{9}} = \frac{|d - 3|}{3}$$

2. Lage der Ebene relativ zur Kugel

- Ebene schneidet die Kugel:

$$\frac{|d - 3|}{3} < 1 \Rightarrow |d - 3| < 3 \Rightarrow 0 < d < 6$$

- Ebene berührt die Kugel (Tangentialebene):

$$\frac{|d - 3|}{3} = 1 \Rightarrow |d - 3| = 3 \Rightarrow d = 0 \text{ oder } d = 6$$

- Ebene liegt außerhalb der Kugel:

$$\frac{|d - 3|}{3} > 1 \Rightarrow |d - 3| > 3 \Rightarrow d < 0 \text{ oder } d > 6$$

3. Ebene halbiert die Kugel Damit die Ebene die Kugel in zwei gleich große Teile teilt, muss sie durch den Mittelpunkt der Kugel verlaufen. Also:

$$\frac{|d - 3|}{3} = 0 \Rightarrow |d - 3| = 0 \Rightarrow d = 3$$

Die Ebene halbiert die Kugel genau dann, wenn $d = 3$

Lösung 2025 1. Session Frage 3

Beide Terme sind für sich stetig und differenzierbar, zu untersuchen ist der „Übergang“ bei $x = 0$.

1. Untersuchung auf Stetigkeit bei $x = 0$ Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -4(0)^2 - 8(0) = 0$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + \tan\left(0 + \frac{3}{4}\pi\right) = 1 + \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - 1 = 0$$

Da beide Grenzwerte übereinstimmen, ist f stetig an der Stelle $x = 0$.

2. Untersuchung auf Differenzierbarkeit bei $x = 0$ Ableitung von links:

$$f_1(x) = -4x^2 - 8x \Rightarrow f_1'(x) = -8x - 8 \Rightarrow f_1'(0) = -8$$

Ableitung von rechts:

$$f_2(x) = 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)} \Rightarrow f_2'(0) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)}$$

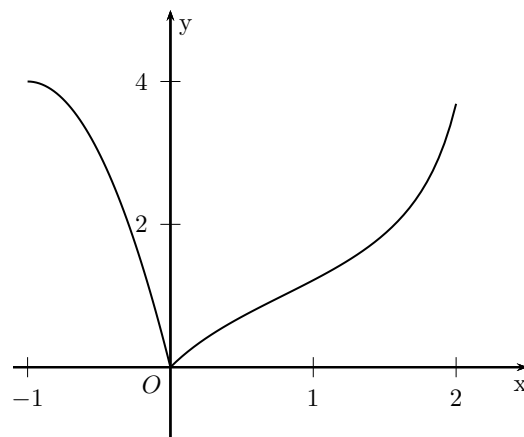
Da

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_2'(0) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Die Ableitungen stimmen nicht überein, daher ist f nicht differenzierbar bei $x = 0$.

Fazit: Die Funktion f ist auf dem Intervall $[-1, 2]$ **stetig**, aber **nicht differenzierbar** an der Stelle $x = 0$.

Graph der Funktion:



Lösung 2025 1. Session Frage 4

Gegeben ist die Funktion:

$$y = g(x) \cdot \sin^2 x$$

mit den Bedingungen:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \quad \text{und} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Gesucht ist die Gleichung der Normalen an die Kurve im Punkt mit Abszissenwert $x = \frac{\pi}{4}$.

1. Ableitung von y Mit der Produktregel ergibt sich:

$$y' = g'(x) \cdot \sin^2 x + g(x) \cdot 2 \sin x \cos x$$

Da $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, folgt:

$$y' = g'(x) \cdot \sin^2 x + g(x) \cdot \sin(2x)$$

2. Funktions- und Ableitungswert an $x = \frac{\pi}{4}$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

3. Gleichung der Normalen Die Steigung der Tangente ist $m_T = 3$, daher ist die Steigung der Normalen:

$$m_N = -\frac{1}{3}$$

Die Normale verläuft durch den Punkt $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, also ergibt sich die Gleichung in Punkt-Steigungs-Form:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Umgestellt zur expliziten Geradengleichung:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12} + 1$$

Lösung 2025 1. Session Frage 5

Damit die Graphen der Funktionen $y = f(x) = e^x$ und $y = g(x) = 6 - ke^{-x}$ einander berühren, muss bei der Berührstelle x folgendes Gleichungssystem erfüllt sein:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Aus:

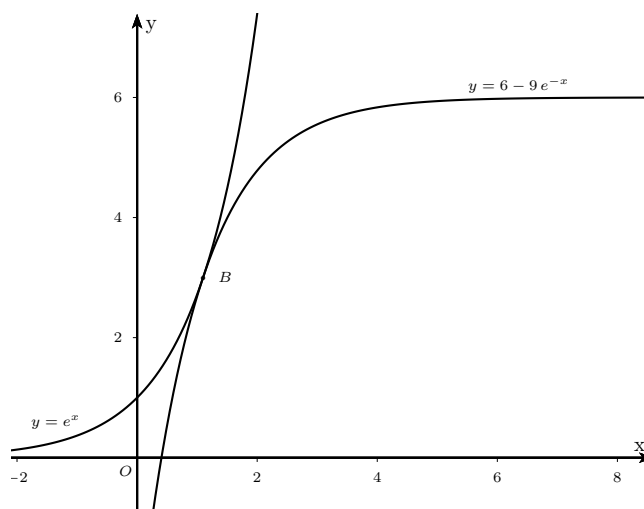
$$f'(x) = e^x \quad \wedge \quad g'(x) = ke^{-x},$$

ergibt sich: $e^x = ke^{-x} \Rightarrow e^{2x} = k \Rightarrow e^x = \sqrt{k}$

Einsetzen in $f(x) = g(x)$ ergibt:

$$\sqrt{k} = 6 - \frac{k}{\sqrt{k}} = 6 - \sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9$$

Berührpunkt: $y = 6 - \sqrt{k} = 3$; $e^x = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$, also ist der Berührpunkt $(\ln(3); 3)$.



Lösung 2025 1. Session Frage 6

Die Tangente und der Graph der Funktion f verlaufen durch den Berührungspunkt T , dessen Abszisse Null ist. Einsetzen in die Gerade $y = 2x + 3$ liefert:

$$y_T = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Da bei Berührung die Steigungen gleich sind, ist bei $x = 0$ die Geradensteigung ($k=2$) gleich der Ableitung der Funktion.

Damit f die Gerade berührt und das Integral passt, muss gelten:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 2 \\ \int_0^3 f(x) dx = 9 \end{cases}$$

Die Gerade selbst erfüllt dies nicht:

$$\int_0^3 (2x + 3) dx = [x^2 + 3x]_0^3 = 18 \neq 9$$

Wir probieren es mit einem Polynom 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$

$$f'(x) = 2ax + b; f'(0) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^2 + 2x + 3$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3 = 9a + 18 = 9 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

Dieses Polynom erfüllt alle gewünschten Eigenschaften. Natürlich erfüllen Polynome höheren Grades auch diese Eigenschaften. Sie sind mit diesen Angaben aber nicht eindeutig!

Lösung 2025 1. Session Frage 7

Die Menge der Ereignisse für den Wurf von vier vierseitigen Würfeln wird durch die geordneten Quadrupel $(a;b;c;d)$ der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 4 gebildet, welche die möglichen Ergebnisse des Würfelwurfs darstellen. Die Anzahl der möglichen Fälle ist also die Anzahl der Anordnungen mit Wiederholung von vier verschiedenen Elementen der Klasse 4:

$$D_{4,4} = 4^4 = 256.$$

- Betrachten Sie das Ereignis "Quadrupel, bei denen sich alle vier Zahlen unterscheiden". Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Permutationen von 4 verschiedenen Elementen:

$$P_4 = 4! = 24.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist also

$$p(E_1) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \approx 9,375\%$$

- Betrachten Sie das Ereignis E_2 alles gleiche Zahlen zu würfeln, also $(1; 1; 1; 1)$, $(2; 2; 2; 2)$, $(3; 3; 3; 3)$, $(4; 4; 4; 4)$. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist also:

$$p(E_2) = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64} \approx 1,5625\%$$

Lösung 2025 1. Session Frage 8

- Das Wort STUDIARE besteht aus 8 verschiedenen Buchstaben. Daher ist die Zahl der (teilweise sinnfreien) Anagramme gleich

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Darunter ist auch das Wort STUDIARE selbst.

- Nun betrachten wir die Permutationen der 4 Buchstaben, die nicht in ARTE enthalten sind (also SUDI) und dem fünften Element, das ARTE ist. Dies entspricht also den Permutationen von 5 Elementen. Die Anzahl der Anagramme ist in diesem Fall

$$P_5 = 5! = 120.$$

- Das Wort VACANZA besteht aus 7 Buchstaben, allerdings sind 3 davon gleich. Also ist es eine Permutation mit Wiederholung und die Zahl der verschiedenen Anagramme ist

$$P_7^{(3)} = \frac{7!}{3!} = 840.$$