Problemstellung 1

1. Die gesuchte lineare Funktion durch die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 0)$ lautet

$$f(x) = -x + 1$$

im Intervall $[0, 1]$. Die Gleichungen für die Begrenzungslinien sind:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \pm(x+1) & \text{für } -1 \le x < 0 \\ \pm(-x+1) & \text{für } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

2. Im 1. Quadranten hat das Quadrat eine Fläche von 1, die Kurve muss somit mit den Koordinatenachsen eine Fläche von 0,55 einschließen. Für die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind folgende Bedingung erforderlich: a) $f(0) = 1 = c$ b) $f(1) = 0 = a + b + 1$; weiters folgt aus $f'(0) = 0$ die Gleichung $b = 0$, daraus folgt $a = -1$ und schließlich liefert die Flächenbedingung $\int_0^1 -1x^2 + 1dx = \frac{2}{3}$, aber nicht den geforderten Wert 0,55. Eine quadratische Funktion ist demnach ungeeignet.

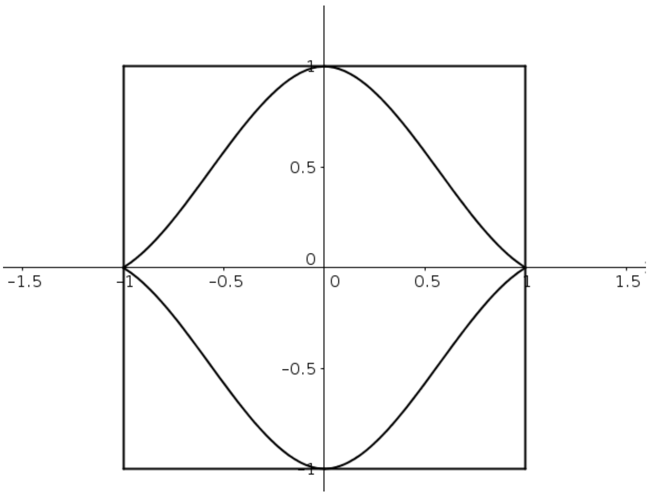
Für die kubische Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ \int_0^1 f(x)dx = 0,55 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + 1 = 0 \\ c = 0(\text{ daraus folgt } b = -a - 1) \\ \int_0^1 ax^3 + (-a-1)x^2 + 1dx = 0,55 \end{cases}$$

Aus der letzten Bedingung erhält man $a = \frac{7}{5}$ und daraus die Funktion

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$$

Es bleibt zu zeigen, dass damit auch die Ausgangsbedingung c) erfüllt ist: bei $x = 0$ ist der Funktionswert 1, bei $x = 1$ hat f eine Nullstelle und in diesem Intervall ist die Funktion streng monoton fallend, da $f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x = \frac{3}{5}x(7x - 8)$ im offenen Intervall $]0, 1[$ negativ ist.



3. a) Überprüfung der Bedingungen:

   i. $a_n(x) = 1 - x^n$:

   a) $a_n(0) = 1 - 0^n = 1$
   b) $a_n(1) = 1 - 1^n = 1 - 1 = 0$
   c) Zu zeigen ist $0 < a_n(x) < 1$:

Es gilt:

$$\begin{aligned} 0^n &< x^n < 1^n \qquad (\text{für } 0 < x < 1) \qquad | \cdot (-1) \\ 0 &> -x^n > -1^n \qquad | + 1 \\ 1 &> 1 - x^n > 1 - 1^n = 0 \end{aligned}$$

ii. $b_n(x) = (1-x)^n$:

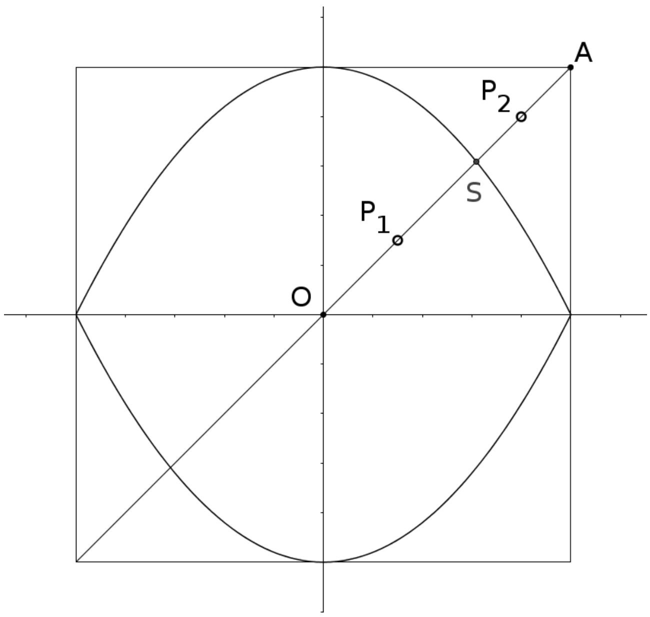
a) $b_n(0) = (1-0)^n = 1^n = 1$
b) $b_n(1) = (1-1)^n = 0^n = 0$
c) Es ist $0 < b_n(x) < 1$, weil $1-x$ in diesem Intervall zwischen 0 und 1 liegt und damit auch jede Potenz mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Flächen:

i. $A_n = 4 \cdot \int_0^1 (1-x^n)dx = 4 \left[x - \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = 4 - \dfrac{4}{n+1}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 4$. Die gesamte quadratische Fliese wird somit bemalt.

ii. $B_n = 4 \cdot \int_0^1 (1-x)^n dx = 4 \left[-\dfrac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = 0 - \left(-\dfrac{4}{n+1} \right) = \dfrac{4}{n+1}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = 0$. Die gesamte quadratische Fliese bleibt unbemalt.

4. a) In der Grafik sind zwei Beispieltropfen P_1 und P_2 auf der Diagonalen dargestellt. Während der Tropfen P_1 in den bemalten Bereich fällt und somit keinen Schaden anrichtet, sind Fliesen mit Punkten wie P_2 im Intervall $\overline{SA}$ Ausschussware.



Der x-Wert von S ergibt sich als (positive) Lösung der Gleichung $x = 1 - x^2$:
$x_S = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ (Goldener Schnitt).

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ausschusses gilt (aus Symmetriegründen):
$p = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{OA}} \approx \dfrac{\sqrt{(1-0,618)^2 + (1-0,618)^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{0,54}{1,41} = 38,2\%.$

Bei 5000 Fliesen erwartet man 20%, also 1000 Fliesen mit Tropfen und somit etwa 382 mangelhafte Fliesen.

b) Für b_2 gelten die gleichen Überlegungen, diesmal ist $S \approx (0,382; 0,382)$ und damit $p \approx 0,618$.
Es sind diesmal also etwa 618 Fliesen betroffen.

Insgesamt sind also 382+618=1000 Fliesen betroffen.

(Anmerkung: die Kurven a_2 und b_2 sind im 1. Quadranten symmetrisch bezüglich des Punktes $(0,5; 0,5)$. Auf Grund dieser Symmetrieeigenschaft könnte man obiges Ergebnis auch graphisch herleiten.)

Problemstellung 2

1. $f_k'(x) = -3x^2 + k$. $f_k'(0) = k$. $f_k'(1) = k - 3$. Daraus ergibt sich die Tangente r_k im Punkt $(0,9)$: $y = kx + 9$ und die Tangente s_k im Punkt $(1; 8+k)$: $y = (k-3)x + 11$.

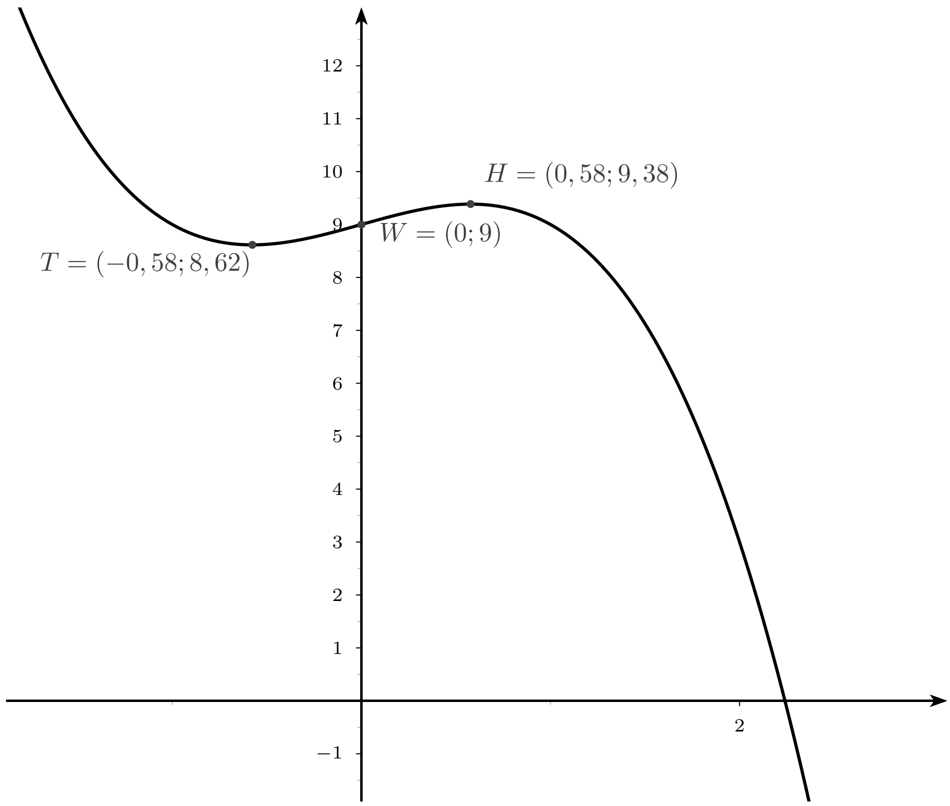
   Der Schnittpunkt M der Tangenten:

$$\begin{aligned} \cancel{kx} + 9 &= \cancel{kx} - 3x + 11 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

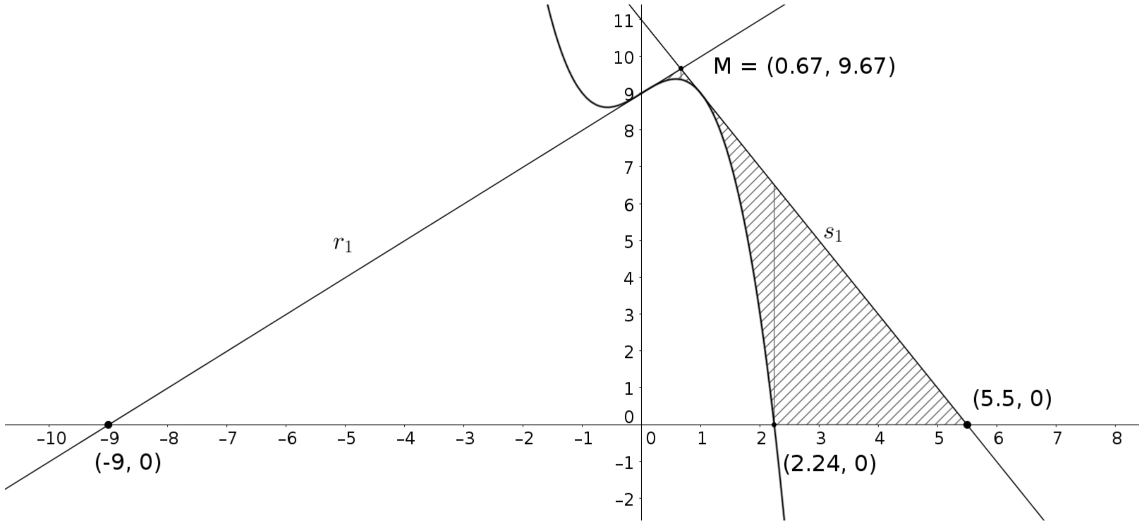
   Dieses Ergebnis ist unabhängig von k.

2. Es ist $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}k + 9\right)$. Die Forderung $y_M < 10$ führt auf die Ungleichung $\frac{2}{3}k + 9 < 9$ und damit $k < \frac{3}{2}$. Der größte ganzzahlige Wert ist $k = 1$.

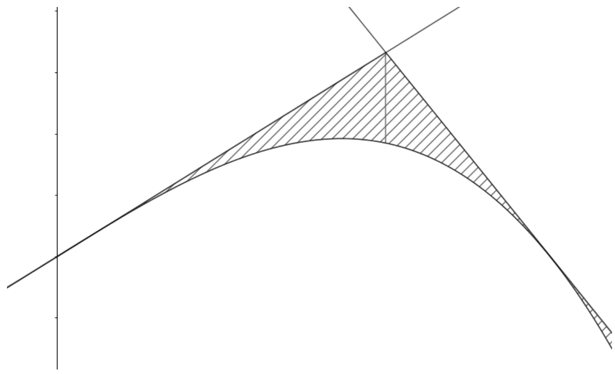
   Kurvendiskussion von $f_1(x)$: $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, überall definiert, stetig und differenzierbar und die Wertemenge ist $W = \mathbb{R}$. Sie hat genau eine Nullstelle bei $x \approx 2,24$, welche nur numerisch näherungsweise berechnet werden kann. Die Extremwerte lauten $H = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 9,38\right)$, $T = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 8,62\right)$ und der Wendepunkt liegt bei $W = (0,9)$.



3. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Verhältnis der schraffierten Fläche A_1 (siehe Abbildung) zur Fläche A_2 des Bereichs T.



Der Bereich unter dem Punkt M ist hier nochmal vergrößert dargestellt:



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\frac{2}{3}} x+9-(-x^3+x+9)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2,24} -2x+11-(-x^3+x+9)dx + \frac{(5,5-2,24)\cdot(-2\cdot 2,24+11)}{2} \\ &\approx 0,049+2,53+10,63 = 13,21 \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot(\frac{11}{2}+9)\cdot\frac{29}{3}) = \frac{841}{12} \approx 70,08$$

Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{A_1}{A_2} \approx \frac{13,21}{70,08} = 18,85\%$

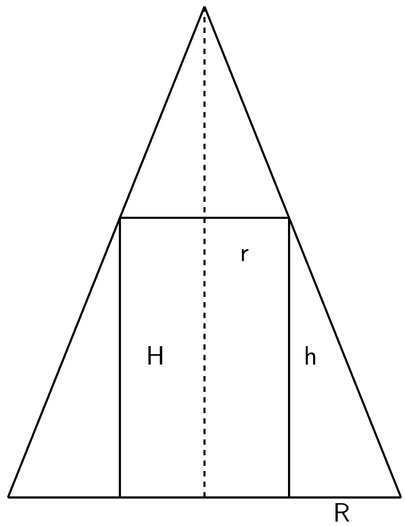
4. Die Ursprungsgerade durch $N = (x_N, y_N)$ hat die Gleichung $y_N = k \cdot x_N$. Die Steigung der Normalen ist gleich dem negativen Kehrwert der Tangentensteigung und damit ist
   $y_N = -\frac{1}{f'(x_N)} \cdot x_N$ bzw. $f(x_N)\cdot f'(x_N) + x_N = 0$.

   Ist nun f eine beliebige Polynomfunktion von Grad n, so ist f' eine Polynomfunktion von Grad $n-1$ und folglich gilt für den Grad des Produktes $f(x)\cdot f'(x)$: $n+n-1 = 2n-1$.

   Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine Polynomfunktion $2n-1$. Grades maximal $2n-1$ Nullstellen.

Frage 1

Es seien r der Zylinderradius und h die Zylinderhöhe und die entsprechenden Großbuchstaben der Radius bzw. die Höhe des Kegels (vgl. Skizze).



Zu zeigen: $V_{\text{max}} < \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2\pi \cdot H}{3}$.

Aus der Ähnlichkeit erhält man $\dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{H-h}$ bzw. $r = R \cdot \dfrac{H-h}{H}$.

$V_{\text{max}} = r^2\pi \cdot h = \dfrac{R^2}{H^2}(H-h)^2 \cdot \pi \cdot h = \dfrac{R^2\pi}{H^2}(H^2h - 2Hh^2 + h^3)$.

$V'(h) = \dfrac{R^2\pi}{H^2}(H^2 - 4Hh + 3h^2) = 0$ mit der Lösung $h_1 = H$ und $h_2 = \dfrac{H}{3}$. Die erste Lösung führt auf ein minimales Volumen.

Es ist $V''(h) = \dfrac{R^2\pi}{H^2}(-4H + 6h)$, somit $V''\left(\dfrac{H}{3}\right) = \dfrac{R^2\pi}{H^2}\left(-4H + 6 \cdot \frac{H}{3}\right) = -\dfrac{2R^2\pi}{H} < 0$ und damit das gesuchte Maximum.

$V_{\text{max}} = \dfrac{4}{9}R^2\pi \cdot \dfrac{H}{3}$.

$$\begin{aligned} V_{\text{max}} &< \frac{1}{2}\frac{R^2\pi \cdot H}{3} \\ \frac{4}{9}R^2\pi \cdot \frac{H}{3} &< \frac{1}{2}R^2\pi \cdot \frac{H}{3} \\ \frac{4}{9} &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Frage 2

Es sei p die Wahrscheinlichkeit eine 4 zu erhalten. Aus der Angabe ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable „Augenzahl“:

k	1	2	3	4
P(X=k)	8p	4p	2p	p

Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten immer 1 sein muss, gilt: $8p + 4p + 2p + p = 1$. Somit ist $p = \frac{1}{15}$.

Damit kann jetzt die Frage beantwortet werden:

$$P(1,1) + P(2,2) + P(3,3) + P(4,4) = \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{17}{45} \approx 37,78\%.$$

Frage 3

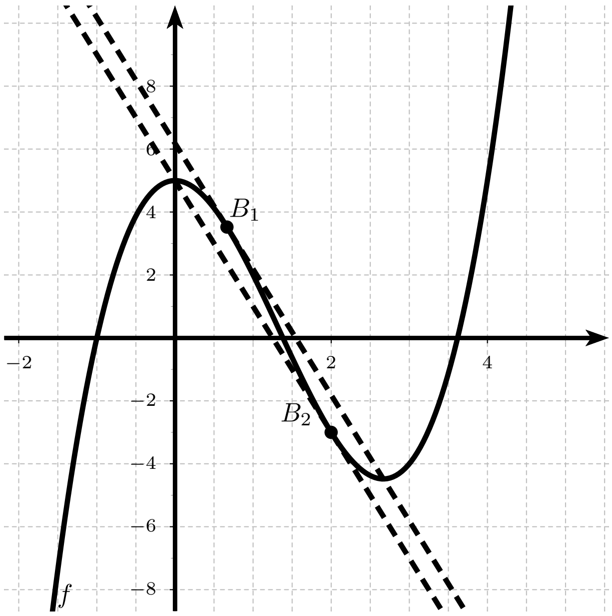
Für die Berührungspunkte der Tangente an die Funktion muss gelten, dass die 1. Ableitung mit der Tangentensteigung -4 übereinstimmt, daraus folgt die Gleichung $3x^2 - 8x = -4$ mit den Lösungen $x_1 = \dfrac{2}{3}$ und $x_2 = 2$.

Eingesetzt in die Funktion ergeben sich 2 mögliche Berührungspunkte $B_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{95}{27}\right)$ und $B_2 = (2, -3)$.

Setzt man diese Werte in die Tangentengleichung ein, so ergeben sich 2 mögliche Werte für k:

$$k_1 = \frac{167}{27} \qquad \text{und} \qquad k_2 = 5$$

Zur Veranschaulichung:



Frage 4

Die Terme $e^{\sin(x)}$ und $5 - \cos(x)$ sind jeweils beschränkt.

- Grenzwert für $x \to +\infty$:

  Der Zähler geht gegen plus unendlich und der Nenner ist beschränkt, da e^{-x} gegen Null geht. Der gesuchte Grenzwert ist plus unendlich, da der Nenner immer positiv und ungleich Null ist.

- Grenzwert für $x \to -\infty$:

  Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$ und damit sind die Voraussetzungen für die Regel von de L'Hospital erfüllt:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{-e^{-x} + \sin(x)}$$

  Das Ergebnis ist in diesem Fall Null, da der Zähler beschränkt ist und der Nenner gegen minus unendlich geht.

Frage 5

Es seien r der Kreisradius, a die Rechtecksbreite und entsprechend $2r$ die Rechteckslänge.

Aus $U = 2$ erhält man die Nebenbedingung $\frac{2r\pi}{2} + 2a + 2r = 2$, also $a = \frac{2 - 2r - \pi r}{2}$.

Für die zu maximierende Fläche ergbit sich:

$$\begin{aligned}
F(r,a) &= \frac{r^2\pi}{2} + 2ar \\
F(r) &= \frac{r^2\pi}{2} + 2r \cdot \frac{2 - 2r - \pi r}{2} = \frac{1}{2}\left(4r - r^2\pi - 4r^2\right) \\
F'(r) &= 2 - r\pi - 4r = 0 \\
r &= \frac{2}{\pi + 4} \approx 0,28
\end{aligned}$$

Da $F''(r) = -\pi - 4 < 0$ ist, handelt es sich um ein Maximum.

Für die Rechtecksbreite a erhält man $a = \dfrac{2}{4+\pi} \approx 0,28$, also $a = r$ und für die Rechteckslänge $2r = \dfrac{4}{4+\pi} \approx 0,56$.

Frage 6

Gesucht ist der Mittelpunkt der Kugel $M = (x_M, y_M, z_M)$ und der Kugelradius $r = |\overline{MT}|$, die Kugelgleichung lautet $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$.

Gegeben ist die Gerade r. Diese Gerade wird mit der Geraden g durch M und T geschnitten. Da der Radius senkrecht zur gegebenen Ebene stehen muss, ergibt sich aus der Ebenengleichung direkt der Richtungsvektor der Geraden und damit eine mögliche Geradengleichung durch den Punkt T als Stützvektor für g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schneidet man nun r mit g, so ergibt sich der Schnittpunkt M aus dem Gleichungssystem $-4 + 3s = t$, $-1s = t$ und $1 - 2s = t$, man erhält $s = 1$ und $t = -1$ und daraus, indem man in eine der beiden Geraden einsetzt, $M = (-1, -1, -1)$.

Für den Radius: $r = \sqrt{(-4+1)^2 + (0+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{14}$

Somit ist die Gleichung der Kugeloberfläche:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 14$$

Frage 7

$$\begin{aligned} \int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx &= 10 \\ \left[x^3 + 3x\right]_a^{a+1} &= 10 \\ (a+1)^3 + 3(a+1) - (a^3 + 3a) - 10 &= 0 \\ 3a^2 + 3a - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $a_1 = -2$ und $a_2 = 1$.

Frage 8

- Die Wahrscheinlichkeit bei genau 10 Spielen zu gewinnen ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$:

$$\binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{1024}$$

- Man gewinnt nach genau 11 Spielen, wenn man von den ersten 10 genau 9 Mal gewinnt und auch das 11. Spiel gewinnt:

$$\binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{1024}$$

- Man gewinnt nach genau 12 Spielen, wenn man von den ersten 11 genau 9 Mal gewinnt und auch das 12. Spiel gewinnt:

$$\binom{11}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{55}{4096}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Spieler also in maximal 12 Spielen gewinnt liegt bei $\dfrac{1}{1024} + \dfrac{5}{1024} + \dfrac{55}{4096} = \dfrac{79}{4096} \approx 1,93\%$.

Da es laut Angabe egal ist, welcher Spieler gewinnt, verdoppelt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{79}{2048} \approx 3,86\%$$

Frage 9

Das Dreieck liegt in der Ebene α, da die Koordinaten von jedem Punkt die Ebenengleichung erfüllen.

Das Dreieck ist gleichseitig, da $\overline{AB} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$, $\overline{AC} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$ und $\overline{BC} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$ ist.

Der Eckpunkt P des Tetraeders liegt genau senkrecht über bzw. unter dem Schwerpunkt S des gleichseitigen Dreiecks ABC. Die Koordinaten des Schwerpunktes S ergeben sich aus $\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

Man kann leicht nachrechnen, dass für die Höhe eines Tetraeders gilt: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ (a Seitenkante). In diesem Fall: $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Die möglichen Eckpunkte P findet man dadurch, dass man von S aus die Höhe in Richtung der normierten (Vektor mit Länge 1) Normalen zur Ebene α abträgt. Der Normalvektor kann dabei direkt aus der gegebenen Ebenengleichung abgelesen werden: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Der normierte Vektor $\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{OP} = \vec{OS} \pm h \cdot \vec{n_0} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} \pm \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$P_1 = (1, -1, 0)$ und $P_2 = \left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

Frage 10

Es ist $y' = 2ke^{kx+2}$ und $y'' = 2k^2e^{kx+2}$.

Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2k^2e^{kx+2} - 4ke^{kx+2} - 6e^{kx+2} &= 0 \qquad | : (2e^{kx+2}) \neq 0 \\ k^2 - 2k - 3 &= 0 \\ (k-3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Werte für k lauten also $k_1 = 3$ und $k_2 = -1$.